I. THEORETISCHE GRUNDLAGEN FÜR DIE KONSTRUKTION GEOLOGISCHER MODELLE.

II. ZUR THEORIE DER PARALLELSTELLUNG VON BLÄTTCHEN IN FLÜSSIGKEITEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE DER NATURWISSENSCHAFTLICH-MATHEMATISCHEN FAKULTÄT DER ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT ZU FREIBURG I. BR. VORGELEGT

VON

O. MORATH
AUS WELLENDINGEN (BADEN).

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

FREIBURG I. BR.
CARITAS-DRUCKEREI. 1913.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545322_0058

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, zwei geologische Fragen mathematisch zu fassen:

Die erste betrifft die Herstellung eines geeigneten Modells für die geologischen Vorgänge in der Natur und soll diese nebst ihrer Endwirkung durch Zusammenpressen so wiedergeben, daß sie den natürlichen im mechanisch ähnlichen Sinne entsprechen.

Die zweite Frage sucht mathematisch zu begründen, warum in einer großen Gesteinsklasse, den kristallinen Schiefern, alle tafelförmigen Gemengteile sich nahezu in einer Richtung anordnen.

Nur die Einkleidung dieser Fragen ist geologisch, ihre Lösung muß mathematisch gegeben werden.

Inhaltsangabe.

Seite

Erster Teil.

Theoretische Grundlagen für die Konstruktion geologischer Modelle.

I. Helmholtzsche Untersuchungen über die Konstruktion von hydro- und aerodynamischen Modellen 9

II. Übertragung auf das System der elastischen Grundgleichungen.

1. Das System der elastischen Grundgleichungen 14
2. Begriff der mechanischen Ähnlichkeit 16
3. Die elastischen Grundgleichungen des mechanisch ähnlichen Systems und Folgerungen aus ihnen für die Größen mit Dimensionen 18
4. Einige allgemeinere Gesichtspunkte für die Konstruktion des Modells 26
5. Beziehungen aus der Elastizitätslehre für die Biegungsbeanspruchung 28
6. Verwertung dieser Beziehungen zur Prüfung der Materialkonstanten, wie sie infolge der mechanischen Ähnlichkeit für den Modellstoff gefordert werden 33
7. Tabellen für Granit, Kalk- und Sandstein nebst weiteren Beziehungen für die Zug-, Druck- und Schubfestigkeiten 35

III. Einiges über frühere, tektonische Modelle 42

1. Herstellung des Materials mit den geforderten Eigenschaften . 45
2. Versuche, die mit Hilfe dieses Materials ausgeführt wurden . 48

Zweiter Teil.

Zur Theorie der Parallelstellung von Blättchen in Flüssigkeiten.

I. Begründung dieser Frage und allgemeine Voraussetzungen . . . 54

1. Unendlich kleine Bewegungen 56
2. Kontinuierlich wirkender Impuls 56

II. Anwendung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen auf die Bewegung der kreisförmigen Lamelle in ruhender Flüssigkeit.

1. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen 57
2. Richtungen permanenter Translation 58
3. Unendlich kleine, impulsive Störung aus dem stationären Zustande 59
4. Die stabilen Achsen der Lamelle 61
5. Spezialfall einer solchen Bewegung 63

III. Das Blättchen in bewegter Flüssigkeit 66

Erster Teil.

Theoretische Grundlagen für die Konstruktion geologischer Modelle.

I. Helmholtzsche Untersuchungen über die Konstruktion von hydro- und aerodynamischen Modellen.

Helmholtz veröffentlichte in den „Monatsberichten der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin“ vom 26. Juni 1873 eine Arbeit unter dem Titel: Über ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend nebst Anwendung auf das Problem, Luftballons zu bauen. Darin machte er auf eine interessante Anwendung der hydrodynamischen Grundgleichungen aufmerksam. Mit Hilfe der Theorie versuchte er nämlich, Resultate, die an einem mechanischen System, etwa an einem Schiff unter Wasser, gewonnen wurden, zu übertragen auf ein anderes, näher zu charakterisierendes, gebildet aus einem Luftballon und der ihn umgebenden Luft. Von welch weitgehender Bedeutung solche Untersuchungen für die Aviatik sind, ist wiederholt dargetan worden.

Die Grundlage, auf der Helmholtz aufbaut, bilden die Eulerschen Differentialgleichungen der Bewegung mit der Stockesschen Erweiterung, wodurch die innere Reibung in jene eingeführt wird. Für das als gewichtslos angenommene System lauten sie:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\delta p}{\delta x} = {} & \frac{\delta u}{\delta t} + u\frac{\delta u}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta y} + w\frac{\delta u}{\delta z} - \\
& \mu\left\{\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta z^2}\right\} - \\
& \frac{\mu}{3}\frac{\delta}{\delta x}\left\{\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z}\right\}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

mit zwei analogen Ansätzen, wenn statt x und u nur y und v bzw. z und w gesetzt wird. Dazu kommt noch die Kontinuitätsgleichung:

$$(2) \qquad \frac{\delta \varrho}{\delta t} + \frac{\delta (\varrho u)}{\delta x} + \frac{\delta (\varrho v)}{\delta y} + \frac{\delta (\varrho w)}{\delta z} = o.$$

In (1) und (2) bedeuten u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit eines Teilchens der Flüssigkeit nach den rechtwinkligen Koordinaten der x, y und z, t die Zeit, p den Druck, ϱ die Dichte und μ die Reibungskonstante. Vektorenanalytisch läßt sich das System der Gleichungen kürzer folgendermaßen schreiben:

$$-\frac{1}{\varrho} \nabla p = \frac{\delta (u, v, w)}{\delta t} + [(u, v, w)] \ (u, v, w) -$$

$$\mu \nabla^2 \ (u, v, w) - \frac{\mu}{3} \nabla \ div \ (u, v, w)$$

$$\text{und} \quad \frac{\delta \varrho}{\delta t} + div \ [\varrho \ (u, v, w)] = o.$$

Die Bedeutung der angeführten Signaturen ergibt sich aus dem Vergleich mit (1) und (2).

Setzt man in dem System statt:

$$U = n \cdot u; \ X = \frac{q}{n} x; K = q \cdot \mu; P = n^2 r p + \text{Const.}$$

$$(3) \quad V = n \cdot v; Y = \frac{q}{n} y; \ E = r \cdot \varrho; T = \frac{q}{n^2} \cdot t;$$

$$W = n \cdot w; \ Z = \frac{q}{n} z,$$

wo n der Faktor für die Geschwindigkeit, q der für die Reibung und r derjenige für die Dichte ist, so ergibt sich durch Einsetzen der transformierten Systemgrößen in (1) und (2) ein neues System von Gleichungen. Die Glieder dieser haben jeweils alle denselben, gemeinsamen Faktor, so daß die resultierenden Gleichungen ihrer Form nach mit den ursprünglichen vollständig übereinstimmen, nur daß an Stelle der kleinen jetzt die großen Buchstaben stehen.

Nach (3) gilt für einen Körper, der sich in einer kompressiblen Flüssigkeit bewegt, das Gesetz: Der Druck wächst gegen die Flächeneinheit der Oberfläche wie $n^2 r$. Die Reibungskräfte sind proportional zu $\mu \varrho$ und den partiellen Abteilungen $\frac{\delta u}{\delta x}$ etc. Sie wachsen also in gleichem Maße wie die Druckkräfte, nämlich ebenfalls im Verhältnis $n^2 r$. Also Druck- und Reibungskräfte sind für entsprechend ähnliche Flächenstücke proportional mit $\frac{q^2}{n^2} n^2 r = q^2 r$. Zur Überwindung der Widerstände, wie sie ein etwa allseitig eingetauchtes Schiff entgegen seiner Bewe-

gung erfährt, ist danach eine Arbeit notwendig, die für gleiche Zeiten wie $n\,q^2\,r$ anwächst.

Wird die Schwere von Flüssigkeit und Modell noch mit in Betracht gezogen, so ist der gemeinsame Faktor $\frac{q}{n^3} = 1$ zu setzen; denn dann kann g als Summand noch mit in der Gleichung berücksichtigt werden. Vernachlässigt man die Reibung, so wird $\mu = K = o$. Es reduziert sich dann (3) zu:

$$X = n^2\,x;$$
$$Y = n^2\,y;\; T = n\,t \text{ etc.}$$
$$Z = n^2\,z.$$

Diese Bedingungen beziehen sich also auf Schiffe mit n^2-fachen Dimensionen und n-facher Geschwindigkeit. Bleibt die Modellflüssigkeit die ursprüngliche, so ist $r = 1$. Der gesamte Widerstand der Schiffsoberfläche wächst also wie q^2 oder wie n^6. Die aufzuwendende Arbeit ist n^7-mal der ersteren, wächst demnach in etwas stärkerem Maße als das Volumen des Schiffes. Praktisch bedeutete dies eine Einschränkung; denn der Vorrat an Brennmaterial und die Größe des Dampfkessels sollen nur einen gewissen Bruchteil des Schiffsvolumens einnehmen. Ihr Gewicht darf ferner eine gewisse Größe nicht überschreiten, da das Schiff andernfalls sinkt. — Unter Zugrundelegung der heutigen Schiffsbautechnik müßten diese Betrachtungen teilweise modifiziert werden. — Als Forderung ergibt sich so die Konstruktion leichterer Maschinen bzw. solcher größeren Nutzeffektes.

Da die hydrodynamischen Grundgleichungen auch bezüglich der Gase, z. B. der Luft, Gültigkeit besitzen, so läßt sich die vorangegangene Überlegung ebenso auf Luftballons anwenden; d. h. es lassen sich deren Bewegungen vergleichen mit denen von Schiffen. Die Dimensionen der ersteren wird man aber der Unbequemlichkeit, der technischen Schwierigkeiten und anderer Gründe wegen nicht über eine gewisse Größe hinaus wachsen lassen. Ein bestimmtes Volumen bedingt jedoch ein gewisses, maximales Gewicht. Ein Wasserstoffballon müßte ein 837- und ein Ballon mit Leuchtgasfüllung ein 2208-mal größeres Volumen besitzen als das Schiff bei jeweils demselben Gewicht. Dabei sind nur die Gasgewichte, nicht aber die der Hülle etc. berücksichtigt. Helmholtz gibt einige Zahlenverhältnisse bezüglich der Wahl der Systemgrößen an. Es sei $\frac{1}{r} = 773$ und $q = 0{,}8082$.

Der Faktor n ist wegen der Kompressibilität ebenfalls gegeben. Er läßt sich mit Hilfe einer akustischen Tatsache bestimmen. Druck und Schallgeschwindigkeit stehen, wie bekannt, in einer bestimmten Beziehung zueinander. Wird letztere in Wasser mit a bezeichnet, so ist:

$$p = a^2 \varrho \text{ und diejenige für die Luft: } P = A^2 E.$$

Dabei ist angenommen, daß durch die Bewegungen die Temperatur nicht wesentlich beeinflußt wird. Die zwei Bedingungen für den Druck ergeben die Beziehung: $A^2 = a^2 n^2$; jetzt ist also n seinem Werte nach eindeutig bestimmt. Es sei $n = 0{,}2314$; dann wird $\frac{q}{n} = 3{,}4948$, $\left(\frac{q}{n}\right)^3 = 42{,}61$ und der Proportionalitätsfaktor für die Arbeit: $q^2 n r = \frac{1}{5114{,}3}$; letztere ist also ein verhältnismäßig geringer Betrag, der leicht geleistet werden kann. Das Gewicht des Ballons mit Wasserstoffüllung wäre bei der unveränderten Größe $= \frac{42{,}6}{2208{,}5}$ von dem des Schiffes. Die Geschwindigkeit des ersteren wäre also 0,2314, die Arbeit $\frac{1}{5114}$mal größer als die des Schiffes bei einem etwa $3^1/_2$ mal so großen Volumen des Ballons. Hemmend für die praktische Ausführung sind die großen Dimensionen und die Beschränkung des Modellgewichts. Würde man beim Schiff allein das Gewicht der Menschen berücksichtigen, so dürfte das Gesamtgewicht des Leuchtgasballons nur $\frac{42{,}6}{2209} = \frac{1}{52}$ von dem der Schiffsmaschine sein. Im Ballon müßte aber auch nur $\frac{1}{5114}$ von der Arbeit der Schiffsmaschine geleistet werden. Die Forderung, eine Maschine mit stark reduziertem Gewicht zu konstruieren, ist damit also wieder gegeben.

Helmholtz geht nun noch näher auf die Bedingungen ein, denen eine Maschine zu genügen hat, wenn sie der oben angegebenen Anforderung entsprechen soll. Er erledigt ferner den speziellen Fall, wenn die Flüssigkeiten inkompressibel und reibungslos sind.

Letzterer führt noch zu einigen interessanten Schlüssen: Für $K = \mu = o$ muß die Veränderung der Längen und Geschwindigkeiten so erfolgen, daß der gesamte Flächendruck wie das Gewicht des Körpers wächst, wenn wiederum die Modellflüssigkeit

die ursprüngliche bleibt. Der gesamte Flächendruck ist aber: die in Betracht kommende Fläche mal Druckkraft auf ihre Einheit. Also wird nach $P = n^2 p$ jetzt $\frac{q^2}{n^2} n^2 = q^2 = \left(\frac{q}{n}\right)^3$. Die zur Ausführung der Bewegung erforderliche Arbeit ist nach früherem proportional zu $q^2 n$, also zu $n^7 \left(\frac{q}{n}\right)^{\frac{7}{2}}$. Läßt man q mit n proportional wachsen, so bleiben die Dimensionen ungeändert; die Geschwindigkeiten wachsen wie n, der Widerstand wie n^2, die Arbeit wie n^3. Die Maschine des Modellschiffes müßte also bei genau demselben Modellgewicht die dreifache Arbeitsleistung hervorbringen.

Ist das Modellschiff ein Luftballon, so können die Schlüsse von vorhin direkt auf dessen Bewegung übertragen werden. Bei unveränderter Größe würde die Arbeit anwachsen wie $n^3 r$, wenn die Geschwindigkeit wie n zunimmt; dabei würde das Gewicht immer noch $n^3 r$ proportional sein. Bezüglich des Verhältnisses zwischen Arbeitsleistung und Gewicht gilt also auch für ein System mit Luft als Flüssigkeit dieselbe Forderung wie oben.

Daraus zieht Helmholtz den bemerkenswerten Schluß, daß es dem Menschen nie möglich sein wird, mit Hilfe der eigenen Muskelkraft sich in die Luft erheben zu können. Vorausgesetzt ist dabei nur das eine, daß die Arbeitsleistung des Menschen im Maximum höchstens seinem Körpergewicht proportional anwächst; daneben fehlt immer noch das Gewicht der künstlichen Flugwerkzeuge. Ebenso interessant ist die andere Folgerung bezüglich der maximalen Größe, die ein Vogel annehmen kann. Da das Gewicht wie $\left(\frac{q}{n}\right)^3$, die Arbeit aber wie $\left(\frac{q}{n}\right)^{\frac{7}{2}}$ wächst, letztere mithin in stärkerem Maße zunimmt als ersteres, so hat die Größe der Vögel aus dem schon genannten Grunde eine Grenze, die im Modell der großen Geier etwa erreicht sein soll.

Die noch weiter folgenden Angaben mit Zahlenbeispielen beziehen sich auf Verhältnisse, die von der heutigen Wissenschaft und Technik schon längst überholt sind. Der nützliche Gedanke der Arbeit liegt aber darin, daß auch die Theorie, hier also die hydrodynamischen Grundgleichungen der Bewegung schon über Vorgänge, die an und für sich von einer großen Reihe von Faktoren in dieser besonderen Form mitbestimmt werden, weitgehenden Aufschluß geben, ohne daß man die Gleichungen zu lösen braucht.

II. Übertragung auf das System der elastischen Grundgleichungen.

1. Das System der elastischen Grundgleichungen.

Ähnliche Überlegungen lassen sich nun auch, wie hier zum ersten Male versucht werden soll, auf solche Vorgänge übertragen, wie sie durch die elastischen Grundgleichungen dargestellt werden. Mit ihrer Hilfe wird es sodann gelingen, einen Vorgang, wie ihn die Gebirgsbildung im großen aufweist, nun auch im kleinen, d. h. im Modell mit verhältnismäßig großer Annäherung wiederzugeben. Den Ausgangspunkt der Betrachtungen bildet jetzt also das System der elastischen Grundgleichungen der Bewegung. Letztere geben dasjenige Bewegungsgesetz an, nach welchem eine endliche Deformation innerhalb eines vollkommen elastisch isotropen Körpers fortschreitet. Es muß aber die Größe der Deformation innerhalb der Grenze der vollkommenen Elastizität bleiben. In seiner allgemeinsten Form lautet das System:

$$\varrho \frac{d^2}{dt^2}(\xi, \eta, \zeta) = (\lambda + N)\left(\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}, \frac{\delta}{\delta z}\right)\Delta + N\nabla^2(\xi, \eta, \zeta) + \varrho(X, Y, Z);^1$$

oder im besondern für die x-Komponente allein:

$$\varrho \frac{d^2\xi}{dt^2} = (\lambda + N)\frac{\delta \Delta}{\delta x} + N\nabla^2\xi + \varrho X. \tag{1}$$

Das System ist bezogen auf die Volumeneinheit. ξ, η, ζ sind die elastischen Verschiebungen, die bei der Ableitung der Gleichungen als sehr klein im Vergleich zu den Körperdimensionen im undeformierten Zustande, also gegenüber den Koordinaten x, y, z vorausgesetzt wurden. Diese Annahme verträgt sich durchaus mit den wirklichen Verhältnissen. Damit wurde aber auch diese vereinfachte Form der eben angegebenen Gleichungen erreicht, da die Produkte und höheren Potenzen der Verschiebungen so vernachlässigt werden konnten. Sehr wesentlich war jene Voraussetzung mit Rücksicht auf die Änderung der Winkel bei den Formveränderungen. Nur im Falle sehr kleiner Richtungsänderungen kann nämlich an Stelle der trigonometrischen Tangente der Winkel im Bogenmaß gesetzt werden, ein Punkt, der für spätere Ableitungen eine Rolle spielt. Unter dieser Vor-

[1] Christiansen-Müller, Elemente der theor. Physik, 3. Aufl., S. 179.

aussetzung geben also die genannten Gleichungen die streng giltigen Beziehungen für die infinitesimalen Verschiebungen. ϱ bedeutet im System demnach die Dichte des elastischen Körpers. t ist die Zeit, die der Vorgang zu seinem Verlaufe braucht, wenn ein Teilchen dabei um eine Strecke mit den Komponenten ξ, η, ζ sich verschiebt; $\frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2}$, $\frac{\delta^2 \eta}{\delta t^2}$, $\frac{\delta^2 \zeta}{\delta t^2}$ sind die infinitesimalen Größen der Beschleunigung. Bewegungen des Körpers, wie sie einem starren Systeme zukommen, sind in den Gleichungen nicht mitenthalten. λ ist eine Hilfskonstante, die, durch den Youngeschen Modul E und der Poissonschen Konstanten k ausgedrückt, auch in der Form geschrieben werden kann:

$$\lambda = \frac{E}{(1+k)\,(1-2\,k)}.$$

Die Konstante k wird bestimmt durch das Verhältnis von Querkontraktion zur Längsdilatation und kann nach der Formel Werte annehmen, die innerhalb o und $^1/_2$ liegen. Praktisch kommen die Größen zwischen $^1/_3$ und $^1/_4$ am meisten in Betracht. Die experimentellen Werte weichen im allgemeinen sehr erheblich voneinander ab. Unter Querkontraktion versteht man die Verkürzung einer Querlinie, dividiert durch ihre ursprüngliche Länge. In derselben Weise wird die Längsdilatation definiert; sie ist die Verkürzung bzw. Verlängerung der Längeneinheit. E entspricht dem einfachen Zuge. Beide sind miteinander durch die Beziehung verknüpft: $Z = E$ mal Längsdilatation, wenn Z die Zugspannung bedeutet. N ist der Schubelastizitäts- oder auch Scheerungsmodul und stellt sich dar in der Form:

$$N = \frac{1}{2}\,\frac{E}{1+k}.$$

Die Größe $\triangle = \operatorname{div}(\xi, \eta, \zeta)$ ist die kubische oder räumliche Dilatation, die sich mit Hilfe der Verschiebungen durch die Gleichung:

$$\triangle = \frac{\delta \xi}{\delta x} + \frac{\delta \eta}{\delta y} + \frac{\delta \zeta}{\delta z}$$

ausdrücken läßt. Sie ist eine Skalargröße und ergibt sich folgendermaßen: Das Verhältnis eines beliebigen, prismatischen Volumenelementes im verzerrten zu dem im unverzerrtem Zustand ist gleich der Funktionaldeterminante:

$$\frac{\delta(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)}{\delta(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1+\frac{\delta\xi}{\delta x}, & \frac{\delta\xi}{\delta y}, & \frac{\delta\xi}{\delta z} \\ \frac{\delta\eta}{\delta x}, & 1+\frac{\delta\eta}{\delta y}, & \frac{\delta\eta}{\delta z} \\ \frac{\delta\zeta}{\delta x}, & \frac{\delta\zeta}{\delta y}, & 1+\frac{\delta\zeta}{\delta z} \end{vmatrix} = 1 + \triangle.$$

Die Größe $\triangle$ bedeutet aber die Volumenänderung pro Volumeneinheit in einem Punkte und wird kubische oder räumliche Dilatation genannt. Sie ist von dem bereits angegebenen Betrage. Dabei sind also die Produkte und höheren Potenzen vernachlässigt worden; denn die Verschiebungen wurden als sehr klein, streng genommen als unendlich klein vorausgesetzt. $\triangle$ ist somit ein hinreichend genaues Äquivalent der Volumendilatation. Das Glied $\nabla^2(\xi, \eta, \zeta)$ ist die sogenannte Laplacesche Funktion der Verschiebungen. Das Zeichen ∇^2 gibt an, daß die Summe der zweiten Differentialquotienten nach den Achsenrichtungen gebildet werden soll, also der Ausdruck: $\nabla^2 = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}$. An letzter Stelle stehen die mit ϱ multiplizierten Größen X, Y, Z. Sie sind die Komponenten der beschleunigenden Kraft nach den drei Achsen und geben ihrer Größe nach die auf die Volumeneinheit bezogene Massenkraft an.

2. Begriff der mechanischen Ähnlichkeit.

Wie eingangs festgestellt, gibt das System der elastischen Grundgleichungen die Ausbreitung einer kleinen Deformation in einem vollkommen elastisch isotropen Körper an. Die Natur realisiert diesen idealen Fall aber nicht. Um jedoch von einer bestimmten Grundlage ausgehen zu können, soll angenommen werden, daß mit Verzicht auf größere Genauigkeit diese Gleichungen ebenfalls den Bewegungsvorgang eines gewissen Schichtenkomplexes der oberen Erdrinde darstellen, jenen Vorgang nämlich, der zur Gebirgsbildung führt. Mit welcher Genauigkeit hernach etwa erworbene Resultate zu beurteilen sind, wird sich verhältnismäßig unschwer angeben lassen. Die Möglichkeit einer angenähert richtigen Abschätzung aber soll durch die vorliegende Arbeit erreicht werden. Es wird sich übrigens zeigen — um diese Tatsache schon vorweg zu nehmen —

daß die Konstruktion eines dem Naturvorgange in allen Teilen sich ähnlich verhaltenden Modelles ganz unabhängig von dem genannten Gleichungssystem erfolgen kann. Der besseren Anschauung wegen sei letzteres jedoch für das folgende beibehalten. Daß es nebenbei den Naturvorgang trotzdem mit etlicher Annäherung wiedergibt, zeigt der Umstand, daß die Poissonsche Konstante, eine jener maßgebenden, elastischen Größen auf Grund mannigfacher Versuchsergebnisse für die verschiedensten Gesteinsarten der Erdrinde fast durchweg denselben Wert, nämlich rund $^1/_4$, beibehält.

Denkt man sich in der Natur einen Bereich von 1000 oder mehr qkm Oberfläche abgegrenzt, der eine solche Gesamtdicke von übereinanderliegenden Schichten besitzt, wie sie für die Bildungen noch wesentlich in Betracht kommt, so frägt es sich, wie ist ein solcher Komplex mit seinen dynamischen Faktoren nachzubilden, damit zwischen Natur und Modell in allen Einzelheiten eine möglichst weitgehende Ähnlichkeit stattfinde. Daß man nicht mit demselben Material in kleinem Maßstabe arbeiten kann, um geometrisch ähnliche Formen zu erhalten, scheint von vornherein ziemlich ausgeschlossen und wäre auf alle Fälle ein äußerst schwerfälliges Experiment. Das, was das Modell wiedergeben soll, ist der geometrisch ähnliche Verlauf der Bewegungen und im Resultat dieses Vorganges das der nachgebildeten Form geometrisch ähnliche Bild. Dies kann aber nur erreicht werden, wenn das System der Forderung der mechanischen Ähnlichkeit entspricht. In ihr ist die der geometrischen ohne weiteres enthalten. Die Eigenschaften der ersteren sollen nun näher angegeben werden.

Die Abbildung, die hier in Betracht kommt, soll eine eindeutige und zugleich anschauliche sein. Die Geometrie kennt ja eine Reihe von charakteristischen Beziehungen zwischen den Elementen, die ihr zugehören. Sie stellt drei Abstufungen von Transformationsgruppen auf, die die projektive, affine und äquiforme Geometrie ausmachen. Solche Transformationen können nun auch auf Gebilde ausgedehnt werden, denen neben geo-

[1] Landolt und Börnstein, Physik.-chem. Tabellen, 3. Aufl., S. 234.

metrischen noch mechanische Eigenschaften zukommen. Von letzteren spricht man dann, wenn zu den Elementen von der Dimension der Länge, wie die Geometrie mit ihnen arbeitet, noch andere mit den Dimensionen der Masse und der Zeit hinzutreten. Die Elemente solcher korrespondierender Gebilde können dann ebenso eindeutig aufeinander bezogen werden wie die der geometrischen. Für die Massenverteilungen in beiden werden also bestimmte, eindeutige Beziehungen bestehen: Es werden beide Systeme von Kräften beansprucht werden, die einander entsprechen. Ihre Stellungen müssen während der Bewegung dauernd einander zugeordnet bleiben. Sind diese Bedingungen erfüllt, so nehmen also die Bewegungen einen, einander eindeutig zugeordneten Verlauf an. Damit ist aber erreicht, daß man aus der Beschaffenheit der Bewegung des einen Systems die des andern folgern kann und umgekehrt.

Von all den Verwandtschaften ist nun die der geometrischen, bzw. die der mechanischen Ähnlichkeit als deren erweiterte Form die anschaulichste. Überträgt man diesen Begriff also auf Systeme mit mechanischen Eigenschaften, so hat man den Begriff der mechanischen Ähnlichkeit. Die geometrische verlangt, daß entsprechende Längen, Flächen und Körper je in einem, einmal bestimmt gewählten, konstanten Verhältnis zueinander stehen. Entsprechend müssen bei mechanisch ähnlichen Systemen nun auch die Zeiten, in welchen entsprechende Wege zurückgelegt werden, ein, einmal angenommenes, gegenseitiges Verhältnis beibehalten. Derselben Bedingung haben die einander zugeordneten Massen, Geschwindigkeiten und Kräfte zu genügen. Letztere müssen ferner auch bezüglich ihres Angriffspunktes und ihrer Richtungen einander im genannten Sinne entsprechen. Ein System nun, das diesen Anforderungen genügt, heißt in Bezug auf das im zugeordnete „mechanisch ähnlich“.

3. Die elastischen Grundgleichungen des mechanisch ähnlichen Systems und Folgerungen aus ihnen für die Größen mit Dimensionen.

Will man also zu dem System der elastischen Grundgleichungen ein anderes, ihm mechanisch ähnliches aufstellen, so kann man ganz allgemein folgendermaßen verfahren:

Für die x-Komponente der Verschiebung gilt die Gleichung (1). Die ihr entsprechende für das mechanisch ähnliche System wird dann von folgender Form sein:

$$(2) \qquad \varrho' \frac{d^2 \xi'}{dt'^2} = (\lambda' + N') \frac{\delta \Delta'}{\delta x'} + N' \nabla^2 \xi' + \varrho' X'.$$

Die hierin auftretenden, gestrichenen Größen stehen zu den ungestrichenen in (1) in gewisser, eindeutiger Beziehung. Es sei allgemein:

$$\varrho' = a_1 \varrho;$$
$$\xi' \text{ und } x' = a_2 (\xi \text{ und } x);$$
$$t' = a_3 t;$$
$$\lambda' = a_4 \lambda;$$
$$N' = a_5 N;$$
$$\Delta' = a_6 \Delta;$$
$$X' = a_7 X.$$

Die a sollen vorläufig noch ganz willkürliche Konstanten bedeuten. Substituiert man diese Werte in (2), so muß jene Gleichung in (1) übergehen. Es wird:

$$\frac{a_1 a_2}{a_3^2} \varrho \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{a_4 a_6}{a_2} \lambda \frac{\delta \Delta}{\delta x} + \frac{a_5 a_6}{a_2} N \frac{\delta \Delta}{\delta x}$$
$$+ \frac{a_5}{a_2} N \nabla^2 \xi + a_1 a_7 \varrho X.$$

Damit diese Form nun mit (1) übereinstimmt, müssen die Faktoren, gebildet aus den a der einzelnen Glieder, einander gleich werden. So bestimmt, haben sie also die Bedingungen zu erfüllen:

$$\frac{a_1 a_2}{a_3^2} = \frac{a_4 a_6}{a_2} = \frac{a_5 a_6}{a_2} = \frac{a_5}{a_2} = a_1 a_7.$$

Die Lösungen der Gleichungen (1) und (2) sind so numerisch dieselben. Auf diese Weise ist die Integration der an sich sehr komplizierten Gleichung (1) zu umgehen, und man kommt trotzdem zum Ziele. Die Gleichsetzung ihrer Faktoren, nun gebildet aus den a, ergibt jetzt eine Reihe gegenseitiger Beziehungen, die unter diesen bestehen. Wegen $a_4 = a_5$ und $a_6 = 1$ müssen die Konstanten λ und N jeweils dieselbe Änderung erfahren. Die Größe Δ darf jedoch nicht verändert werden. Es bleiben nun noch die Beziehungen: $a_4 = a_5 = \frac{a_1 a_2^2}{a_3^2}$ und $a_7 = \frac{a_2}{a_3^2}$. Soll aber das System (2) seinen physikalischen Sinn nicht verlieren, so muß die Größe der Schwerkraft beibehalten werden. Es wird also $a_7 = 1$, d. h. $a_3 = \sqrt{a_2}$. Dann bestimmen sich a_4 und a_5 zu $a_4 = a_5 = a_1 \cdot a_2$. Die Größe a_1 ist der Koeffizient für die

Dichte. λ und N verändern sich jedoch nur dann in demselben Maße, wenn die Änderung das E allein betrifft. Die Poissonsche Konstante, die Volumendilatation etc., kurz also alle die in den Gleichungen vorkommenden Größen ohne Dimensionen dürfen nicht verändert werden, wenn das System der Forderung der mechanischen Ähnlichkeit entsprechen soll. Die auszuführende Transformation ist daher eine solche der Dimensionen und unter der genannten Voraussetzung auch nur die einzig mögliche. In (2) sind demnach die Länge, die Masse und die Zeit in andern Einheiten zu messen. Dann bleiben die Lösungen numerisch wirklich unverändert. Umgekehrt können dann diese Größen wieder auf die ursprünglichen Einheiten zurücktransformiert werden, was mit Hilfe der a sich in der Form gestaltet, wie schon angegeben wurde, also entsprechend:

$$x' = a_2\, x \text{ usw.}$$

Wie die nun folgende Dimensionentransformation der Gleichung (1) genügt, so erfüllt sie auch die Bedingungsgleichungen, bzw. die speziellen Forderungen, die in der Form von Gleichungen ausgedrückt sind; denn physikalische Größen, die einander gleich sein sollen, müssen zum mindesten auch dieselben Dimensionen besitzen.

In (1) hat ϱ die Dimensionen $[m\, l^{-3}]$, die Beschleunigung g, ebenso wie X die von $[l\, t^{-2}]$; in den Ausdrücken für λ und N ist k dimensionslos; die beiden Größen haben also die Dimensionen von E, nämlich $[m\, l^{-1}\, t^{-2}]$. Diejenigen von $\triangle$ sind $[m^0\, l^0\, t^0]$; es bleibt also unverändert; denn es ist eine Verhältniszahl und zwar der Quotient: Volumenzunahme, dividiert durch das ursprüngliche Volumen. Die Gleichung (1), angeschrieben in ihren Dimensionen, lautet nun:

$$(3)\quad [m\, l^{-3}]\ [l\, t^{-2}] = [m\, l^{-1}\, t^{-2}]\ [l^{-1}] + \| + [m\, l^{-3}]\ [l\, t^{-2}].$$

Letztere stimmen in den einzelnen Gliedern miteinander überein. Die Beschleunigung muß in beiden Systemen dieselbe bleiben. Dieser Forderung wird dadurch entsprochen, daß l und t^2 denselben Koeffizienten erhalten, wie es die allgemeine Darstellung schon ergab. Es muß $a_3 = \sqrt{a_2}$ gesetzt werden. Die Poissonsche Konstante darf nicht verändert werden. Die experimentellen Ergebnisse lassen in dieser Forderung aber keine wesentliche Einschränkung erkennen. Die Grundeinheiten der

Länge, Masse und Zeit, sowie die aus ihnen abgeleiteten Einheiten lassen sich nun ihrer Größe nach auch für das Modell festlegen:

Nach $a_4 = a_1 a_2$ und $a_3 = \sqrt{a_2}$ bleiben noch die zwei Konstanten a_1 und a_2 willkürlich, über die verfügt werden kann. Will man im Modell nun Stoffe zur Verwendung bringen, die etwa die Dichte 2,50 besitzen, also Material, welches in dieser Hinsicht im Durchschnitt dem der oberen Erdkruste entspricht, so wird damit die Dichte in beiden Fällen konstant gehalten. Es bleibt jetzt nur noch der Maßstab der Länge willkürlich.

l: soll im Verhältnis $\frac{1}{a_2}$ reduziert werden.

m: Bleibt aber ϱ konstant, so muß die Gesamtmasse m um das $\frac{1}{a_2^3}$-fache verkleinert werden.

t: Bedarf die Natur zur Bildung eines gewissen Faltenkomplexes der Zeit t, so ist im Modell für den Ablauf des entsprechenden Vorganges eine solche vom Betrage: $t' = \frac{1}{a_3} \cdot t = \frac{1}{\sqrt{a_2}}\, t$ notwendig.

E: Der Elastizitätsmodul hat die Dimensionen $[m\, l^{-1}\, t^{-2}]$. Es wird also $E' = \frac{a_2^2}{a_1} E = \frac{1}{a_2} E$; d. h. der Elastizitätsmodul muß im gleichen Verhältnis wie die einander entsprechenden Längen reduziert werden.

B, Z, D, S: Dieselbe Reduktion gilt für die Festigkeiten, also für die Biegungs-, Zug-, Druck- und Schubfestigkeit; denn sie sind ebenso wie E Kräfte pro Flächeneinheit, haben also mit diesen dieselben Dimensionen.

K, Q: Als Massenkraft tritt hier das Eigengewicht auf. Da m die Gesamtmasse des betrachteten Schichtenkomplexes bedeuten soll, so wird nach der Beziehung $K = m\, g$, wo K die Kraft ist, diese wie m verändert; denn g soll konstant bleiben. Die Kraft K sowie das Eigengewicht Q werden also im Verhältnis $\frac{1}{a_2^3}$ reduziert. Das Gewicht ist so proportional dem Volumen, was, da die Dichte beibehalten wurde, ohne weiteres auch ersichtlich ist.

Es lassen sich nun in einfacher Weise auch andere Eigenschaften angeben, die das Modell aufweisen muß, um seinen Anforderungen als mechanisch ähnliches System zu entsprechen. Der Vorgang, welcher als der eines vollkommen elastisch isotropen Körpers durch die Grundgleichungen charakterisiert wurde, ist ja nicht streng ein solcher. Sein Verlauf wird vielmehr durch die innere und äußere Reibung nicht unwesentlich beeinflußt. Das Material besitzt nämlich die Eigenschaft der unvollkommenen Elastizität. Die Hypothese also, nach welcher die Kräfte der Elastizität nur von den Verrückungen abhängig gedacht werden, ist hier nicht streng richtig. Die elastischen Kräfte sind in unvollkommen elastischen Körpern nicht mehr durch jene allein bedingt, sondern auch durch ihre Geschwindigkeiten. Um aus der bereits angenommenen Theorie auch die Gesetze für unvollkommen elastische Körper ableiten zu können, müssen nur die relativen Verrückungen so klein angenommen werden, daß deren Quadrate und höheren Potenzen gegen die ersteren vernachlässigt werden können. Letzteres ist aber bereits geschehen. Die so erweiterte Gleichung (1) lautet dann:

$$\varrho \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \varrho X + (\lambda + N) \frac{\delta \Delta}{\delta x} + N \nabla^2 \xi + \varepsilon \nabla^2 \frac{\delta \xi}{\delta t} + \varepsilon_1 \frac{\delta^3 \xi}{\delta x^2 \delta t}.$$

ε und ε_1 sind Reibungskoeffizienten[1]. Das System (1) ist aber zur Grundlage gewählt worden, weil späterhin Theorien noch herangezogen werden, die auf ihr beruhen.

Ri: Für die Größe der inneren Reibung bei festen Körpern gibt deren elastische Nachwirkung einige Anhaltspunkte. Wird ein Körper durch Kräfte in deformiertem Zustand gehalten, so nimmt er seine ursprüngliche Gestalt nicht sofort wieder an; sondern diese Rückbildung bis zur Ausgangsform erfolgt erst nach und nach. Diese Erscheinung wird elastische Nachwirkung genannt. Sie ist eine Funktion der Zeit und wird als Folge der inneren Reibung bezeichnet. Deutlicher zeigt sie sich in der Dämpfung von Schwingungen. F. Kohlrausch[2] gibt für den Vorgang der elastischen Nachwirkung der Formel:

[1] Mayer, Crelles Journ. f. Math. LXXVII, 40.
[2] F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 128; I, 1867, S. 213.

$$\frac{dx}{dt} = r \frac{x}{t_m},$$

wo x die Größe der Deformation bezeichnet, t die Zeit der Rückwirkung und r der Koeffizient der elastischen Nachwirkung ist, der die Geschwindigkeit bedingt, für jedes Material konstant bleibt und zwischen 1 und $^2/_3$ liegt. Beanspruchungen nach verschiedener Richtung haben auch verschiedene Nachwirkung zur Folge. Es ist also eine verschiedene Bewegung der Moleküle möglich. Nach der Theorie von Wiechert ist es nun auch höchst wahrscheinlich, daß, je inhomogener der Körper, die Nachwirkung desto kräftiger wird. Diese innere Reibung wirkt der Deformation entgegen. Sie äußert sich wie bei den Flüssigkeiten als Spannung und transformiert sich also wie diese. Es wird so:

$$Ri' = \frac{1}{a_2} Ri.$$

Ra: Bei der relativen Verschiebung größerer Schichtenkomplexe gegeneinander tritt ferner auch äußere Reibung auf. Für sie gelten folgende, zusammenfassende Sätze[1]: *Ra* ist dem Normaldruck des Körpers auf die sich berührenden Flächen proportional, wenn die Kraft in dessen Schwerpunkt angreift. Die äußere Reibung ist unabhängig von der Größe der sich berührenden Flächen, aber abhängig von deren Natur. Für kleinere Geschwindigkeiten ist *Ra* unabhängig von diesen. Ihre Größe ist gegeben durch das Coulombsche Gesetz (1781), welches lautet: $Ra \quad \omega N$, wo ω der Reibungskoeffizient der maximalen, gleitenden Reibung genannt wird, und N der Normaldruck auf die reibende Fläche ist. ω ist gleich derjenigen Zahl, die angibt, welcher Bruchteil der Last zur Überwindung der Reibung bei horizontaler Bewegung und Lage der Gleitflächen gebraucht wird. Die äußere Reibung hat ihre Quellen nicht in Molekularkräften, sondern im Umbiegen der Unebenheiten, also in solchen elastischer Art[2].

[1] W. Kaufmann, Phys. Zeitschrift 1910, S. 186 f.

[2] Landsberg, Pogg.-Ann. 121, 2831, 1864.

Das Gleiten tritt ein, wenn das Zuggewicht gleich ist $Ra = \omega N$ oder, wenn Q das Körpergewicht bedeutet, folgende Beziehung für ω gilt: $\omega = tg\ \alpha$, wo mit α der Winkel der schiefen Ebene bezeichnet wird. ω hat also die Dimensionen $[l^0\ m^0\ t^0]$. Diejenigen von Ra entsprechen der einer Kraft. Bei konstanter Dichte reduziert sich die äußere Reibung demnach wie K und Q. Es ist daher: $Ra' = \frac{1}{a_2^3} Ra$.

Die Bezeichnung Normaldruck, wie sie sich zumeist in Lehrbüchern vorfindet, ist mit Rücksicht auf die zugehörigen Dimensionen ungeeignet; passender würde diese Größe Normalkraft genannt werden.

W. Da für den vorliegenden Fall die Plastizität des Materials noch besonderer Berücksichtigung bedarf, so sei hier ihr Wesen ebenfalls gekennzeichnet[1]. Nachgiebigkeit, Geschmeidigkeit oder Plastizität ist von Weichheit sehr zu unterscheiden. Deren Grenzen sind die äußerste Nachgiebigkeit und die Sprödigkeit, zwischen denen sie sich abstuft. Überschreitet ein Material infolge zu großer Beanspruchung seine Elastizitätsgrenze, so erfährt es dauernde Veränderungen. Bei weiterer Steigerung der Beanspruchung wird die Festigkeitsgrenze F erreicht; d. h. der Zusammenhang der Teile geht jetzt an irgend einer Stelle verloren. Bei einem absolut spröden Körper fallen diese kritischen Punkte zusammen. Hat andererseits ein solcher die Fähigkeit, sich dauernd zu deformieren, so wird die Festigkeitsgrenze nie erreicht. Das einfachste Maß der Plastizität W ist also das der Differenz zwischen der Festigkeitsgrenze und der der vollkommenen Elastizität. Es ist somit $W = F - V$. Als Differenz zweier Moduln wird W der Plastizitätsmodul oder auch die absolute Plastizität genannt. W transformiert sich also wie die Festigkeiten: $W' = \frac{1}{a_2} W$. Unter Plastizitätszahl versteht man den Ausdruck: $W_1 = \frac{F-V}{F}$. Eine ent-

[1] Winkelmann, Handbuch der Physik, 2. Aufl., II 871.

sprechende Größe, welche mit Hilfe der auftretenden, plastischen Wirkung gemessen werden kann, heißt Plastizitätsverhältnis oder auch praktische Plastizität. Ihre Größe wird angegeben durch $W_2 = \frac{F-V}{E}$ und ist ohne Dimensionen. Sie muß also konstant bleiben.

ϱ sei ebenfalls variabel:

ϱ: Will man auch ϱ noch variieren, so kann dies nach (3) dadurch geschehen, daß man m im selben Maße wie ϱ verändert und l als einmal reduziert angenommen beibehält. Es sei also $\varrho' = \frac{1}{a_1}\varrho$.

m: Die Masse m reduziert sich jetzt wie $\frac{1}{a_1 a_2^3}$, da sie gleich Volumen mal Dichte ist.

E: Der Elastizitätsmodul reduziert sich wie $\frac{1}{a_1 a_2}$, ebenso

(B, Z, D, S, Ri, W): die Biegungs-, Zug-, Druck-, Schubfestigkeit, die innere Reibung und der Plastizitätsmodul.

K, Q, Ra: Diese transformieren sich wie die Masse, also wie

$$\frac{1}{a_1 a_2^3}.$$

Würde man dagegen, um die gewünschte Reduktion der Dichte zu erhalten, das $m' = \frac{1}{a_2^3} m$ konstant halten und die Längen noch weiter verändern, so würde die gesamte Änderung wieder zu dem soeben beschriebenen Resultat führen, wenn nur die so veränderte Volumeneinheit mit der ihr zugehörigen Masse auf die ursprüngliche zurücktransformiert wird.

Kurze Zusammenfassung.

Die Forderungen, denen der Modellstoff also zu genügen hat, sind im Falle gleichbleibender Dichte durch die folgenden Beziehungen gegeben:

$$m' = \frac{1}{a_2^3} m; \quad t' = \frac{1}{\sqrt{a_2}} t;$$

$$E', B' Z', D', S', Ri', W' = \frac{1}{a_2} (E, B, Z, D, S, Ri, W),$$

$$K', Q', R_a' = \frac{1}{a_2^3} (K, Q, Ra).$$

Und wird ϱ im Verhältnis $\frac{1}{a_1}$ reduziert, so ist:

$$\varrho' = \frac{1}{a_1}\,\varrho;\; m' = \frac{1}{a_1 a_2^3}\,m;\; t' = \frac{1}{\sqrt{a_2}}\,t;$$

$$E', B', Z', D', S', Ri', W' = \frac{1}{a_1 a_2}\,(E, B, Z, D, S, Ri, W);$$

$$\text{und } K', Q', Ra' = \frac{1}{a_1 a_2^3}\,(K, Q, Ra).$$

Die übrigen Größen in den Gleichungen bleiben konstant.

4. Einige allgemeinere Gesichtspunkte für die Konstruktion des Modells.

Nach dem bisherigen ist also die Modellkonstruktion ganz unabhängig von dem System der elastischen Grundgleichungen und seiner Gültigkeit in Bezug auf die natürlichen Vorgänge. Praktische Rücksichten aber, insofern nämlich die Beurteilung der durch die mechanische Ähnlichkeit geforderten Materialeigenschaften erleichtert wird, machen im folgenden die Zuhilfenahme der Theorie elastischer Vorgänge wieder nützlich. Damit wird allerdings ein gewisser Grad von Ungenauigkeit in das Experiment hineingetragen, insofern jene sich nicht in ihrer vollen Geltung auf die Natur übertragen läßt. Die Größe des Fehlers ist aber aus der hernach folgenden, eingehenden Prüfung unschwer zu erschließen.

Wenn also die bisher gefolgerten Ergebnisse zur Modellkonstruktion verwendet werden sollen, so frägt sich's zunächst, in welchem Maßstab kann die Abbildung am geeignetsten erfolgen? Diese betreffe eine gewisse Zone des Jura, letzterer ein geologisch verhältnismäßig leicht zu beurteilender Gebirgstypus. Die Ausdehnung seiner verschiedenen Querprofile beträgt im Mittel zwischen 20 und 50 km. Soll also diejenige des Modells die Größe 80 bis 150 cm nicht übersteigen, so entspricht einer solchen Übertragung der Maßstab $\frac{1}{25000}$, so daß 1 km in der Natur 4 cm im Modell entsprechen. Läßt man die Dichte unverändert, so nimmt die Zeit, mit welcher der Modellvorgang sich vollzieht, den 157. Teil von derjenigen an, welche die Natur

zur Bildung der betrachteten Form geführt hat. Für die Alpenbildung wird eine Zeit von etwa 20000 bis 500000 Jahren angesetzt; die dem Jura zugehörige ist offenbar weit kürzer. Trotzdem ist man sofort genötigt, diese entsprechend übertragenen, immerhin aber noch sehr ungeheuerlichen Zeiträume für das Modell zu umgehen. Nun erstrecken sich jedoch diese Naturvorgänge über solche Zeiten, daß sie im Vergleich zu den während dieser Zeiträume stattgefundenen Verschiebungen immer noch außergewöhnlich groß bleiben, so daß also umgekehrt der Zustand des Natursystems innerhalb einer Zeit, wie sie im Laboratorium zur Verfügung steht, unbedingt als statischer angenommen werden kann. Beim Versuch muß nur beachtet werden, daß die Beanspruchung des Materials kontinuierlich so erfolgt, daß dieses sich dauernd genügend erholen kann. Dann ist die Größe der reduzierten Zeit ganz gleichgültig.

Die Veränderung der Dichte steht frei. Letzteres kann experimentell zunutze gemacht werden. Sie erfolge im Verhältnis $\frac{1}{a^1} = \frac{3{,}75}{2{,}5} = 1{,}5$, wo die durchschnittliche Dichte des Gesteinsmaterials der oberen Erdkruste zu 2,5 und die des Modellstoffes zu 3,75 angenommen wurde. Die Zahl 3,75 war die größte Dichte des Versuchsmaterials. Über diesen Punkt werden weiter unten ausführlichere Angaben erfolgen. Für den Verkleinerungsmaßstab des Elastizitätsmoduls ergibt sich dann die Zahl $\frac{1}{1{,}66 \cdot 10^4}$. Die wirkenden Kräfte (= Seitendrucke; der eigene Gewichtsdruck kann ihnen gegenüber vernachlässigt werden) reduzieren sich damit auf $\frac{1}{10^{13}}$ von dem ursprünglichen Werte.

Die Reduktion der Moduln und der Festigkeiten ist also eine ganz erhebliche. Trotzdem ergaben unternommene Versuche, daß bei dem zur Verwendung gekommenen Material diese theoretischen Werte mit großer Annäherung erreicht werden können[1]. Es zeigte sich auch bei den Experimenten, die in größerem Maßstabe schon von anderer Seite aus unternommen wurden, daß das Material keineswegs den Faltungs- und den andern, hierhergehörigen Prozessen in dem Maße widersteht, wie man gerne anzunehmen geneigt ist.

[1] Hierüber im praktischen Teil.

5. Beziehungen aus der Elastizitätslehre für die Biegungsbeanspruchung.

Für das folgende sei nun im voraus bemerkt, daß die Theorie, die die Eigenschaften des Modells experimentell zu bestimmen ermöglicht, zu Resultaten führen wird, die innerhalb einer Größenordnung noch hinreichende Genauigkeit besitzen. Die Kompliziertheit der Naturvorgänge und die Unzulänglichkeit der Theorie erschweren es, vollständige Ähnlichkeit zwischen Natur und Modell zu erreichen. Um dagegen die Fehlerquellen, die sich danach durch Übertragung der folgenden, theoretischen Darlegungen auf die natürlichen Verhältnisse ergeben werden, auszuschalten, müßte man einen schwerfälligeren Weg einschlagen und Proben aus natürlichem Material jeweils solchen aus Modellmasse direkt gegenüberstellen. Die Genauigkeit der Versuche hängt doch offenbar in der Hauptsache von der richtigen Wahl des Modellmaterials ab. Das Gestein ist im allgemeinen leicht brüchig. Die Bruchgrenzen müssen im Modell ebenfalls erreicht werden. Es handelt sich also darum, anzugeben, wie sie beim Modellmaterial am besten festzustellen sind. Ein parallelepipedischer Granitbalken wird nun beispielsweise, wenn er an einem Ende eingespannt und am andern frei ist, oder wenn er beiderseits frei auf Stützen liegt, bei gewissen Dimensionen unter seinem Eigengewicht allein schon brechen. Dieser Bruchgrenze entspricht eine bestimmte, maximale Durchbiegung der Stabachse. Ihre Größe soll nun, soweit es die Biegungstheorie ermöglicht, mit deren Hilfe allgemein festgestellt und das Ergebnis auf die Gesteine in der Natur übertragen werden. Es sind also einige Beziehungen aus der Elastizitätslehre notwendig und zwar hier in der Hauptsache solche aus der Biegungstheorie[1].

Die folgenden Formeln entsprechen vereinfachten Annahmen, mit denen man jedoch in der Praxis immerhin auskommt. Für das Material gelte das Gradliniengesetz; d. h. es sei eine lineare Spannungsverteilung vorausgesetzt. Diese Eigenschaft kommt jenem aber nur innerhalb der Proportionalitätsgrenze zu, da dann die Verhältnisgleichheit zwischen Spannung und Formveränderung

[1] A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität § 227—244. Föppel, Vorlesungen über technische Mechanik III, § 22—25. Ritter, Lehrbuch der höheren Mechanik II, §§ 4—7 und 23—25. Clebsch, Theorie der Elastizität § 26, 50, 53.

besteht. Das Hookesche Gesetz spricht diese Beziehung aus. Für Metalle trifft sie in weit stärkerem Maße zu als für Gesteine. Die Abweichung ist aber im letzteren Falle nicht sehr erheblich, so daß deren Gültigkeit für die folgenden Rechnungen vorausgesetzt werden kann. Das Gesetz bezieht sich nur auf den linearen Spannungszustand. Ergänzt wird es durch das, im allgemeinen für die Körper der ersten Art bestätigte Gesetz der Superposition; d. h. neu hinzugekommene Beanspruchungen wirken unabhängig voneinander. Die Spannungszustände überlagern sich. Auch Gesteine entsprechen angenähert dieser Bedingung. Ferner sei die Spannungsverteilung in Querschnitten derart, daß letztere nach der Formveränderung eben bleiben. Es ist dies die Bernouillische Annahme und eine grundlegende Voraussetzung für die Biegungstheorie. Sie trifft in den gewöhnlich betrachteten Fällen mit hinreichender Genauigkeit zu. Entspricht also das Material auch noch dieser Forderung, so bleiben die Querschnitte nach der Formveränderung senkrecht zur elastischen Linie. Als letztere bezeichnet man die Achse des gebogenen Stabes, in die die Angriffspunkte der Kräfte verlegt werden. Sie ändert ihre Länge nicht.

Die Biegungsformeln gelten streng für unendlich kleine Querschnitte; denn dann können diese mit umso geringerer Vernachlässigung als eben angesehen werden. Ferner soll die Krümmung in den einzelnen Punkten der elastischen Linie verhältnismäßig klein sein, weil dann von den Produkten und höheren Potenzen der Verschiebungen wiederum abgesehen werden kann. Die Größe der Biegung läßt sich nach der Strecke beurteilen, um welche sich bei einerseits gestütztem Stabe das andere Ende gesenkt hat.

Die ursprüngliche Lage des Balkens mit rechteckigem Querschnitt sei nun so festgesetzt, daß die x-Richtung mit dessen Achse horizontal, die y-Achse vertikal nach unten und die der z nach vorn verlaufen. Der Balken sei an dem einen Ende festgespannt, so, daß sich dieses in seiner Ebene nicht drehen kann. Der Koordinatenanfang liege im Mittelpunkt des Querschnitts der eingespannten Fläche. Das freie Ende trage die konzentrierte Last P. Für die dadurch zu einer gewissen Kurve umgebogene Zentrallinie gilt dann die folgende Differentialgleichung:

$$E T \frac{d^2 y}{d x^2} = P (l - x),$$

worin T das Trägheitsmoment des Querschnitts im Abstande x vom o-Punkt bedeutet. Für dessen Berechnung werde die Masse pro Flächeneinheit zu 1 und die zur Biegungsebene senkrechte Achse, die durch den Schwerpunkt geht, als Bezugsgerade angenommen. In endlicher Form lautet dieselbe Gleichung:

$$y = \frac{P}{E\,T}\left(\frac{l\,x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right). \quad \text{Für } x = l \text{ wird } y = \mathfrak{f}_{l'} = \frac{P\,l^3}{3\,E\,T},$$

wo T beim rechteckigen Querschnitt den Wert $\frac{b\,h^3}{12}$ annimmt. Die Gleichung der Zentrallinie des beiderseits frei aufliegenden Stabes wird nun dadurch erhalten, daß man für P und x je nur ihren halben Wert setzt. Dann ergibt sich für die Ausweichung aus der Mittellage:

$$\mathfrak{f}_{l'} = \frac{P\,l^3}{48\,E\,T}. \tag{4}$$

Die Krümmung der Zentrallinie zu einer ebenen Kurve trifft zu bei Stäben mit kreisrundem Querschnitt und bei solchen mit rechteckigem umso mehr, je kleiner die Breite des letzteren ist.

Der Stab erträgt nur eine gewisse Durchbiegung. Wird diese überschritten, so bricht er. Dieser kritischen Durchbiegung $\mathfrak{f}_{max}$ entspricht eine kritische Last P_{max}. Ihr Zusammenhang mit der Biegungsfestigkeit wird nach Viktor von Lang[1] für den beiderseits frei aufliegenden, gewichtslosen Balken, der in seiner Mitte die konzentrierte Last P_{max} trägt, gegeben zu: $P_{max} = \frac{2\,b\,h^2}{3\,l}\,B$, wo B die Biegungsfestigkeit bedeutet. Die Last P_{max} muß also in der Mitte angehängt werden, um den Bruch gerade zu bewirken. Die maximale Durchbiegung wird für den beiderseits aufliegenden Stab:

$$\mathfrak{f}_{max} = \frac{l^2\,B}{6\,E\,h}. \tag{5}$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für den Fall, daß nicht eine konzentrierte Last in irgend welchem Stabteil wirkt, sondern die Beanspruchung durch eine andere erfolgt, die über den ganzen Stab gleichmäßig verteilt ist, wozu auch das Eigengewicht gehört. Die Differentialgleichung für die Zentrallinie des einer-

[1] Einleitung in die theoretische Physik § 247.

seits befestigten und andererseits frei aufliegenden Stabes von der Länge l lautet jetzt:

$$ET\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q\,(l-x)^2}{2},$$

wo mit q das Stabgewicht pro Längeneinheit bezeichnet wurde. Für die Senkung seines freien Endes ergibt sich hier der Ausdruck:

$$f_Q = \frac{P\,l^3}{3\,E\,T} - \frac{q\,l^4}{8\,E\,T} = \frac{5}{24}\cdot\frac{q\,l^4}{E\,T}.$$

Ist er beiderseits gestützt, dann muß in der eben gegebenen Formel l durch $\frac{l}{2}$ ersetzt werden. Also ergibt sich für seine Durchbiegung in der Mitte:

$$f_Q = \frac{5\,Q\,l^3}{384\,E\,T},$$

worin $Q = ql$ das Gesamtgewicht des Balkens bedeutet. Zur Veranschaulichung dieser Größenverhältnisse kann man in jedem Punkt des horizontal liegenden Stabes die Größe des Biegungsmomentes als Ordinate sich aufgetragen denken; wenn die Balkenachse als Abszisse betrachtet wird, so entspricht dessen Endpunkten eine Kurve, die das Gesetz veranschaulicht, nach welchem das Biegungsmoment M mit dem Abstand vom Ende des Balkens sich ändert; für die Biegung durch konzentrierte Last besteht diese Begrenzung aus geraden Linien nach dem Ausdruck: $\frac{M}{M_1} = \frac{P\,x}{P\,l} = \frac{x}{l}$, dies für den einerseits gestützten Stab und

$\frac{M}{M_1} = \frac{P\,\frac{l}{2} - x}{P\,\frac{l}{4}} = \frac{\frac{l}{2} - x}{\frac{l}{2}}$ für den beiderseits aufliegenden. Und die Beanspruchung durch das Eigengewicht ergibt als Ort der Endpunkte der Biegungsmomente für den einerseits freien Stab nach der Beziehung: $\frac{M}{M_1} = \frac{\frac{1}{2}\,q\,x^2}{\frac{1}{2}\,q\,l^2} = \left(\frac{x}{l}\right)^2$ eine Parabel, bestehend aus einem Aste mit dem Scheitel im Endpunkte und der Achse als Vertikale in diesem. Beim beiderseits gestützten wird die Gestalt der gesuchten Kurve gegeben durch:

$\frac{M}{M_0} = \frac{\frac{q}{2}\left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 - x^2\right)}{\frac{q}{8} l^2} = \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - x^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}$, was wiederum einer Parabel entspricht, deren Achse durch den Mittelpunkt der Zentrallinie des Balkens geht und vertikal verläuft. Da die Bruchgefahr nun abhängt von der Beanspruchung der äußersten Elemente im Querschnitt, so wird bei gleicher Durchbiegung der Stab im Falle der Belastung durch eine konzentrierte Last eher brechen als durch die seines Eigengewichts. Bei Gesteinen ist diese Bruchgrenze aber sehr bald erreicht, so daß die geradlinige und die parabolische Begrenzung etc. der jeweiligen Momentenflächen als nur sehr wenig voneinander abweichend angesehen werden können. Dadurch rechtfertigt sich wohl die später folgende Rechnung.

Bisher wurden die Schubspannungen ganz vernachlässigt. Eine hinreichend genaue Näherungsformel soll nun auch deren Beitrag zur Durchbiegung festsetzen. Dieser ist umso größer, je mehr das Verhältnis der Querschnittsdimensionen zur Balkenlänge zunimmt. Die Schubkraft V vergrößert den Biegungspfeil und verändert die Gestalt der elastischen Linien noch etwas. Ist nun der Auflagerdruck gleich L, so ist die Scheerkraft für einen Querschnitt im Abstande $\frac{l}{2} + x$ von dem Auflager:

$V = L - \sum_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} P$, wo die P jetzt beliebig verteilte Lasten sein können.

Das gesamte Biegungsmoment ist dann: $M = L\left(\frac{l}{2} + x\right) - \sum P\left(\frac{l}{2} + x\right)$, oder $\frac{dM}{dx} = L - \sum_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}+x} P$. Für gleichmäßig verteilte Last gilt diese Formel umso strenger. Es ist also:

$$V = \frac{dM}{dx}.$$

Die Schubspannungen verwölben den ursprünglich ebenen Querschnitt. Hier interessiert aber nur die Senkung zweier benachbarter Achsenpunkte. Sie sei *du*. Dann ergibt sich:

$du = \alpha \frac{V\,dx}{G\,bh}$, wo α eine Verhältniszahl ist. Sie berechnet sich mit Hilfe des Begriffs der Formveränderungsarbeit und beträgt für den rechteckigen Querschnitt 1,2. G ist der Schubelastizitätsmodul.

Für konzentrierte Mittellast war beim beiderseits gestützten Stab die Durchbiegung der Mitte: $f_P = \frac{P\,l^3}{4\,E\,bh^3}$. Es ist $V = \frac{P}{2}$, also $du = 0{,}6\,\frac{P\,dx}{G\,bh}$ und $\int_0^{\frac{l}{2}} du = 0{,}3\frac{P\,l}{G\,bh}$. Die Durchbiegung wird so bei gleichzeitiger Berücksichtigung des Biegungsmomentes und der Scheerkraft, wenn $G = 0{,}4\,E$, d. h. $k = \frac{1}{4}$ gesetzt wird:

$$f_P = \frac{P\,l^3}{4\,E\,bh^3} + 0{,}3\,\frac{Pl}{G\,bh} = \frac{P\,l}{4\,E\,bh}\left(\frac{l^2}{h^2} + 3\right).$$

Diese Formel ermöglicht eine ungefähre Abschätzung des Fehlers, den man bei Vernachlässigung des Einflusses der Schubspannungen begeht, wenn $\frac{l}{h}$ gegeben ist. Für $\frac{l}{h} = 10$ macht der Einfluß nur 3 % von dem der reinen Biegung aus; für $\frac{l}{h} = 5$ wird ersterer 12 %.

Unterliegt der Stab seinem Eigengewicht, so wird, da $V = \frac{q\,l}{2} = \frac{Q}{2}$ ist, $du = \alpha\,\frac{V\,dx}{G\,bh} = \frac{0{,}6\,Q}{G\,bh}\,dx$ und $\int_0^{\frac{l}{2}} du = \frac{0{,}3\,Q\cdot l}{G\,bh}$,

(6) also: $f_Q = \frac{5\,Q\,l^3}{32\,E\,bh^3} + \frac{3\cdot Q\,l}{4\,E\,bh} = \frac{Q\,l}{4\,E\,bh}\left(\frac{5}{8}\,\frac{l^2}{h^2} + 3\right)$.

Der Einfluß der Schubspannungen ist also hier etwas größer. Für das Verhältnis $\frac{l}{h} = 10$ wird er annähernd 5 %, und für $\frac{l}{h} = 5$ ergeben sich 19 %. Die hier angeführte Formel liefert hinreichend genaue Näherungswerte.

6. Verwertung dieser Beziehungen zur Prüfung der Materialkonstanten, wie sie infolge der mechanischen Ähnlichkeit für den Modellstoff gefordert werden.

Nun soll das Verhältnis $\frac{l}{h}$ eines Balkens festgestellt werden, wenn dieser ausschließlich infolge seines Eigengewichts zum

Bruche kommen soll. Im Falle einer konzentrierten Mittellast ist der zulässige, maximale Biegungspfeil bestimmt durch $f_{max} = \frac{l^2 B}{6Eh}$. Beim Überschreiten dieser Größe bricht der Stab. Diese Durchbiegung rührt von einer gewissen Mittellast her, die, wenn die Wirkung der Schubspannung in f_{max} mit inbegriffen sein soll, kleiner als P_{max} zu wählen ist. Das Eigengewicht ergab eine Durchbiegung von $f_Q = \frac{Q\,l}{4\,E\,bh}\left(\frac{5\,l^2}{8\,h^2} + 3\right)$, oder, wenn Q durch ql bzw. durch $bh \cdot \varrho \cdot g \cdot l$ ersetzt wird, so ist $f_Q = \frac{\varrho\,g\,l^2}{4\,E}\left(\frac{5\,l^2}{8\,h} + 3\right)$. Der Stab muß die Durchbiegung $\frac{l^2 B}{6Eh}$ annehmen. Durch Gleichsetzen mit $f_Q = \frac{5\,Q\,l^3}{384\,E\,T}$ ergibt sich für $\frac{l^2}{h}$ ohne Berücksichtigung der Schubspannung die Beziehung:

$$\frac{l^2}{h} = \frac{16\,B}{15\,\varrho\,g}.$$

Nun ist für Granit $B = 0{,}8\,\frac{kg}{qmm} = 8 \cdot 10^4 \cdot g\frac{Dyn}{qcm}$. Wird l zu 10^2 cm angenommen, so ergibt sich h zu 0,332 cm. In diesem speziellen Falle wird also $\frac{l}{h} = \frac{10^2}{0{,}332} = \frac{3106}{1}$. Maßgebend bleibt daher nach Vorstehendem für Granit die Formel:

$$\iota = 176,\ 16\sqrt{h}\ \text{cm}.$$

Der Einfluß der Schubspannungen ist hier ganz zu umgehen. Mit zunehmendem l wächst h aber wie dessen Quadrat. Will man nun etwa mit einem Stoffe arbeiten, der im Vergleich zu Granit reduzierte, elastische Konstanten besitzt, so sind nach der Forderung der mechanischen Ähnlichkeit auch die andern, einfachen und abgeleiteten Größen in dem Maße zu verändern, wie früher schon ausführlich dargetan wurde. Dies geht auch aus folgendem hervor. Es war: $f_Q = \frac{5\,Q\,l^3}{32\,E\,bh^3}$, und hieraus ergibt sich: $f_Q \cdot \frac{h^2 E}{l^4} = \frac{5}{32}\,\varrho \cdot g = const.$ Wird hier E transformiert, z. B. im Verhältnis $\frac{1}{10^n}$, so muß wegen der rechten Seite, die nicht verändert werden darf, $\frac{f_Q\,h^2}{l^4}$ in demselben Maße reziprok transformiert werden. Dies kann aber nur so stattfinden, daß alle Maße: f, h, l als Längen gleichmäßig berücksichtigt werden und jede einzelne sich eben

wie $\frac{1}{10^n}$ ändert. Es wird dann $f_Q' \left(\frac{h'}{l'^2}\right)^2 = 10^n f_Q \left(\frac{h}{l^2}\right)^2$. Aus der Beziehung $\frac{l^2}{h} = \sqrt{\frac{32 f_Q \cdot E}{5 \cdot 10^{2n} \varrho g}}$ ergibt sich danach:

$$\frac{l'^2}{h'} = \frac{1}{10^n} \frac{l^2}{h}.$$

Zu einer Tabelle zusammengestellt, ergeben sich so die folgenden Verhältnisse für die zu bestimmten h gehörigen l, vorausgesetzt, daß der Modellstoff die Dichte 2,75, die der des Granits im Durchschnitt entspricht[1], beibehält.

7. Tabellen für Granit-, Kalk- und Sandstein, nebst weiteren Beziehungen für die Zug-, Druck- und Schubfestigkeiten.

Granit.

Die hier in Betracht kommenden, experimentellen Daten für Granit sind die folgenden[2]:

$$\varrho = 2{,}75; \left(E = 2000 \frac{kg}{qmm}\right); \; B = 0{,}8 \frac{kg}{qmm}; \; Z = 0{,}5 \frac{kg}{qmm};$$
$$D = 8 \frac{kg}{qmm}; \; S = 0{,}8 \frac{kg}{qmm}.$$

Mit Rücksicht auf diese Größen ergibt sich für h und l im Falle der Biegungsbeanspruchung (zunächst ohne Berücksichtigung der Schubspannungen) folgende Tabelle:

Formel: $l = \sqrt{\frac{16 B}{15 \varrho g}} h.$

B	l	h	l/h	Maßstab
untransformiert: $l = 176{,}16 \sqrt{h}$	$3{,}96 \cdot 10^2$ cm	5 cm	79/1	unverändert
	$1{,}76 \cdot 10^2$ „	1 „	176/1	
	$1{,}25 \cdot 10^2$ „	0,5 „	250/1	
	$0{,}56 \cdot 10^2$ „	0,1 „	560/1	
	$0{,}38 \cdot 10^2$ „	0,05 „	760/1	
transformiert: $\frac{1}{10^5}$ $l = 0{,}5571 \sqrt{h}$	—	5 cm	—	1 km wird 1 cm
	—	1 „	—	
	—	0,5 „	—	
	0,18 cm	0,1 „	1,8/1	
	0,13 „	0,05 „	2,6/1	
transformiert: $\frac{1}{10^4}$ $l = 1{,}7616 \sqrt{h}$	—	5 cm	—	1 km wird 10 cm
	1,76 cm	1 „	1,76/1	
	1,25 „	0,5 „	2,50/1	
	0,56 „	0,1 „	5,60/1	
	0,4 „	0,05 „	8,00/1	

[1] Landolt und Börnstein, Physik.-chem. Tabellen S. 234.
[2] Ebd. S. 42—53.

Hier wie auch bei den folgenden Tabellen sind wegen der beschränkten Gültigkeit der Formeln einige Zahlenverhältnisse nicht eingetragen.

Wird die Dichte ϱ verändert, so ändert dies an dem Verhältnis $\frac{l^2}{h}$ nichts; denn auf der rechten Seite der Formel $\frac{l^2}{h} = \frac{16\,B}{15\,\varrho\,g}$ kommt m sowohl in B als in ϱ vor. Die Beibehaltung der mechanischen Ähnlichkeit verlangt aber, daß bei der Veränderung der Dichte auch die elastischen Konstanten, wie B etc. in demselben Maße sich ändern. Da die Stoffe im allgemeinen verschiedene Dichten besitzen, diesen aber auch verschiedenes, elastisches Verhalten zukommt, so bedeutet diese Forderung durchaus keinen praktischen Widerspruch.

Tabelle, in der die Schubspannungen mitberücksichtigt werden.

Will man den Einfluß der Schubspannungen noch mitberücksichtigen, so hat man die Gleichungen (5) und (6) miteinander zu kombinieren, um wieder das jeweilige Verhältnis zwischen h und l zu erhalten. Die Ausführung der Rechnung ergibt:

Formel: $l = \sqrt{\frac{16\,B\,h}{15\,\varrho\,g} - 2{,}8\,h^2}$.

B	l	h	l/h	Maßstab
untransformiert: $l = \sqrt{3{,}14 \cdot 10^4 h - 2{,}8\,h^2}$	$3{,}96 \cdot 10^2$ cm	5 cm	79/1	unverändert
	$1{,}76 \cdot 10^2$ „	1 „	176/1	
	$1{,}25 \cdot 10^2$ „	0,5 „	250/1	
	$0{,}56 \cdot 10^2$ „	0,1 „	560/1	
	$0{,}38 \cdot 10^2$ „	0,05 „	760/1	
transformiert: $\frac{1}{10^4}$ $l = \sqrt{3{,}14\,h - 2{,}8\,h^2}$	—	5 cm	—	1 km wird 10 cm
	—	1 „	—	
	0,83 cm	0,3 „	2,7/1	
	0,71 „	0,2 „	3,5/1	
	0,53 „	0,1 „	5,3/1	
	0,39 „	0,05 „	7,8/1	

Das Verhältnis l/h wird hier bei der Transformation $\frac{1}{10^5}$ zu klein, liegt also außerhalb des Gültigkeitsbereichs der Formel.

Die so bestimmten Größen l und h geben die äußersten Grenzen an, bei denen der Zusammenhang eben anfängt, verloren zu gehen. Im Modell wird man, da die Bruchgrenze zum wenigsten erreicht werden soll, bei denselben Längen auch kleinere Höhen für Versuche wählen können.

Die Größe l bei Zugbeanspruchung.

Gerade so, wie im vorhergehenden das Verhältnis $\frac{l}{h}$ im Falle der Biegungsbeanspruchung durch das Eigengewicht bestimmt wurde, kann jenes auch für den Fall des einseitigen Zuges bei Eigengewichtsbelastung angegeben werden. Unter Zug versteht man die auf die Querschnittseinheit kommende Zugkraft oder Zuglast. Der maximal zulässige Zug entspricht der Zugfestigkeit. Wenn also das Eigengewicht pro Flächeneinheit des Aufhängequerschnitts die Größe der Zugfestigkeit erreicht, so reißt der Balken an dieser Stelle. Dem wird genügt durch die Festsetzung: $b\,h\,l\,\varrho\,g = Z\,bh$, oder, da $\varrho\,g$ konstant bleibt, wird $\frac{Z}{l}$ const. $\varrho\,g$, ist also unabhängig vom Querschnitt.

Wird somit Z transformiert, so muß auch l in demselben Maße verändert werden.

Die Länge, bei der der Stab bricht, ist also:

$$l = \frac{Z}{\varrho \cdot g}$$ und transformiert, wird sie: $l' = \frac{1}{10^n}\, l.$

Die zu beliebigen Z berechneten Längen ergeben sich aus der folgenden Tabelle:

Z	l	bh	Maßstab
untransformiert:	$18 \cdot 10^3$ cm	beliebig	unverändert
transformiert $\frac{1}{10^5}$	0,18 „	„	1 km wird 1 cm
transformiert $\frac{1}{10^4}$	1,81 „	„	1 km wird 10 cm

Eine Veränderung der Dichten darf auch hier keine solche des l mit sich bringen.

Die Größe ι bei einseitigem Druck.

Auf dieselbe Weise werden bei einseitiger Druckbeanspruchung die zu gewissen Druckfestigkeiten jeweils gehörigen Längen berechnet. Es ergibt sich hier ebenso wie vorhin:

$$\frac{D}{l} = \text{const.} = \varrho \cdot g \text{ und}$$

$$l = \frac{D}{\varrho\, g}.$$

Folgende Tabelle gibt wieder die bestimmten D entsprechenden Balkenlängen an:

D	l	hb	Maßstab
untransformiert:	$2{,}9 \cdot 10^5$ cm	beliebig	unverändert
transformiert $\frac{1}{10^5}$	2,9 „	„	1 km wird 1 cm
transformiert $\frac{1}{10^4}$	29 „	„	1 km wird 10 cm

Auch hier ist eine Veränderung von ϱ wieder ohne Einfluß auf das l, da nämlich D eine gleichzeitige Änderung von derselben Größe erfahren muß.

Der Verdrehungswinkel bei Schubbeanspruchung.

In einfacher Weise läßt sich ebenso die Größe des Verdrehungswinkels angeben, der bestimmten Schubfestigkeiten entspricht. Für den kreisförmigen Querschnitt ist die Rechnung am einfachsten. In ihm treten keine Normalspannungen auf, wenn der Stab ausschließlich auf Torsion beansprucht wird. Korrespondierende Punkte zweier Querschnitte von gegenseitigem Abstande l sollen nach der Verdrehung miteinander den Winkel φ im Vergleich zu ihrer ursprünglichen Lage bilden. Für die Länge dx ist der Verdrehungswinkel dann: $d\varphi \quad \varphi \frac{dx}{l}$. Dieser Winkeländerung entspricht im Querschnitte eine gewisse Schubspannung. Liegen die beiden korrespondierenden Punkte im Abstand r von der Achse, so ist ihre relative Verschiebung:

$$r \cdot d\varphi \quad r\varphi \frac{dx}{l}.$$

Ursprünglich stand dx senkrecht zum Querschnitt; jetzt bildet dieses mit der Achse einen Winkel γ. Die relative Verschiebung wird also:

$$r \cdot \mathrm{d}\varphi = \gamma \cdot dx = r\varphi \frac{dx}{l}, \text{ also } \gamma = \frac{r\varphi}{l}.$$

Nun ist aber die Schubspannung gleich:

$$\gamma \cdot G = \frac{G r \varphi}{l}.$$

Sie entspreche der Schubfestigkeit S. Der maximale Verdrehungswinkel wird also beim Abstand 1 von der Achse und bei der Balkenlänge 1:

$$\gamma = \frac{r\varphi}{l} = \frac{S}{G},$$

der dieselbe Größe beibehält, ob S transformiert wird oder nicht.

Für Granit ist dieser Winkel $\frac{1}{10^3}$ $1^0\ 9'$.

Kalkstein.

Die Konstanten von Kalkstein haben folgende Werte[1]:

$$\varrho = 2{,}7;\ E = 1900\,\frac{kg}{qmm};\ B = 0{,}9\,\frac{kg}{qmm};\ Z = 0{,}3\,\frac{kg}{qmm};$$
$$D = 5\,\frac{kg}{qmm};\ S = 4\,\frac{kg}{qmm}.$$

Die Zusammenstellung der zu gewissen h berechneten l-Werte ergibt bei Berücksichtigung der Schubspannung folgende Tabelle:

B	l	h	l/h	Maßstab
untransformierte Formel: $l = \sqrt{3{,}5555 \cdot 10^4 h - 2{,}8 h^2}$	$4{,}22 \cdot 10^2$ cm	5 cm	85/1	unverändert
	$1{,}59 \cdot 10^2$ „	1 „	159/1	
	$1{,}33 \cdot 10^2$ „	0,5 „	266/1	
	$0{,}60 \cdot 10^2$ „	0,1 „	600/1	
	$0{,}42 \cdot 10^2$ „	0,05 „	840/1	
transformiert: $\frac{1}{10^5}$ $l = \sqrt{0{,}356 h - 2{,}8 h^2}$	—	5 cm	—	1 km wird 1 cm
	—	1 „	—	
	—	0,5 „	—	
	—	0,1 „	—	
	0,10 cm	0,05 „	2/1	
transformiert: $\frac{1}{10^4}$ $l = \sqrt{3{,}5555 h - 2{,}8 h^2}$	—	5 cm	—	1 km wird 10 cm
	—	1 „	—	
	1,03 cm	0,5 „	2/1	
	0,57 „	0,1 „	5,7/1	
	0,41 „	0,05 „	8,2/1	

Die Größe l bei Zugbeanspruchung.

Bei einseitiger Zugbeanspruchung durch das Eigengewicht reißt der Balken mit der Länge:

$$l = \frac{Z}{\varrho g}.$$

Die entsprechenden, tabellarischen Angaben sind die folgenden:

Z	l	bh	Maßstab
untransformiert:	$11 \cdot 10^3$ cm	beliebig	unverändert
transformiert $\frac{1}{10^5}$	0,10 „	„	1 km wird 1 cm
transformiert $\frac{1}{10^4}$	1,10 „	„	1 km wird 10 cm

[1] Landolt und Börnstein a. a. O. XII, 42.

Bei einseitigem Druck.

Die Balkenlängen bei einseitiger Druckbelastung ergeben sich analog wie bei der Zugbeanspruchung mit Hilfe der Formel:

$$l = \frac{D}{\varrho\, g}$$

und die zugehörigen tabellarischen Werte:

D	l	bh	Maßstab
untransformiert:	$1{,}85 \cdot 10^5$ cm	beliebig	unverändert
transformiert $\frac{1}{10^5}$	1,85 „	„	1 km wird 1 cm
transformiert $\frac{1}{10^4}$	18,5 „	„	1 km wird 10 cm

Verdrehungswinkel.

Die Größe der Schubbeanspruchung bedingt den Torsionswinkel:

$$\gamma = 30'.$$

Sandstein.

Die Konstanten von Sandstein sind die folgenden:

$$\varrho \quad 2;\ E = 630\ \frac{kg}{qmm};\ B = 0{,}6\ \frac{kg}{qmm};\ Z = 0{,}16\ \frac{kg}{qmm};$$

$$D \quad 7\ \frac{kg}{qmm};\ S \quad -.$$

Die Größen l für bestimmte h werden mit Berücksichtigung der Schubspannungen bei Biegungsbeanspruchung jetzt die folgenden[1]:

B	l	h	l/h	Maßstab
untransformiert:	$3{,}71 \cdot 10^2$ cm	5 cm	74/1	
	$1{,}63 \cdot 10^2$ „	1 „	163/1	
$l = \sqrt{2{,}667 \cdot 10^5 h - 2{,}8 h^2}$	$1{,}16 \cdot 10^2$ „	0,5 „	232/1	unverändert
	$0{,}52 \cdot 10^2$ „	0,1 „	520/1	
	$0{,}37 \cdot 10^2$ „	0,05 „	740/1	
transformiert:	—	5 cm	—	
$\frac{1}{10^5}$	—	1 „	—	1 km wird
	—	0,5 „	—	1 cm
$l = \sqrt{2{,}667 \cdot h - 2{,}8 h^2}$	—	0,1 „	—	
	0,08 cm	0,05 „	1,6/1	
transformiert:	—	5 cm	—	
$\frac{1}{10^4}$	—	1 „	—	1 km wird
	0,79 cm	0,5 „	1,6/1	10 cm
$l = \sqrt{26{,}67 h - 2{,}8 h^2}$	0,45 „	0,1 „	4,5/1	
	0,36 „	0,05 „	7,2/1	

[1] Landolt und Börnstein a. a. O. XII, 42.

Ihre Größe bei der Zugbeanspruchung.

Die Formel für die Zugbeanspruchung ist:

$$l = \frac{Z}{\varrho g}.$$

Die zugehörigen l-Werte sind:

Z	l	bh	Maßstab
untransformiert:	$0{,}67 \cdot 10^4$ cm	beliebig	unverändert
transformiert $\frac{1}{10^5}$	0,07 „	„	1 km wird 1 cm
transformiert $\frac{1}{10^4}$	0,67 „	„	1 km wird 10 cm

Bei einseitigem Druck.

Für die einseitige Druckbeanspruchung bei Belastung durch Eigengewicht ergeben sich nach:

$$l = \frac{D}{\varrho g}$$

die Verhältnisse:

D	l	bh	Maßstab
untransformiert:	$2{,}96 \cdot 10^4$ cm	beliebig	unverändert
transformiert $\frac{1}{10^5}$	0,30 „	„	1 km wird 1 cm
transformiert $\frac{1}{10^4}$	2,96 „	„	1 km wird 10 cm

Größe der äußeren und inneren Reibung.

Für Gesteine finden sich bezüglich der äußeren Reibung sehr wenige experimentelle Angaben vor.

Bedeutet ϱ den Koeffizienten der gleitenden Reibung, d. h. den Bruchteil der Last, der zur Überwindung der Reibung verbraucht wird, so beträgt er für:

	bei Ruhe	bei der Bewegung
Muschelkalk auf Muschelkalk:	0,75	0,69
„ „ Rogenstein:	0,75	0,67

Bezüglich der Größe der inneren Reibung wurde bereits angegeben, daß mit zunehmender Inhomogenität des Materials die elastische Nachwirkung und damit auch erstere wachsen. Für Gesteine muß letztere verhältnismäßig groß sein. Experimentelle Daten sind für solche noch keine vorhanden. Ihr Wert

übersteigt aber offenbar den der Metalle bedeutend. Für letztere beträgt er das 10^9-fache von der des Wassers[1]. Diese ist 0,012.

Größe der Plastizität.

Je nach der Art der Beanspruchung ist die Plastizität eines Stoffes ganz verschieden. Der Versuch, ihre Größe zahlenmäßig zu bestimmen, stößt auf große Schwierigkeiten[2], da die Größe V in hohem Maße labil ist. Zum Vergleiche sei angeführt, daß für Flußspat die elastische Vollkommenheit $^1/_3$ der Festigkeit ist, so daß also die Plastizität rund $^2/_3$ beträgt. Bei Massen mit verhältnismäßig geringer Plastizität werden die Versuche direkt unmöglich, da immer sehr bald Sprünge auftreten. Bei Kalkspat sind diese z. B. gar nicht zu umgehen.

III. Einiges über frühere, tektonische Modelle.

Die Ausführung geologischer Experimente ist schon in mannigfacher Weise versucht worden. Es sind aber zum größten Teil relativ einfache Anordnungen, die in vielen wesentlichen Punkten keine Modellähnlichkeit mit der Natur aufweisen. Daher kann man aus dem Verhalten solcher Modelle auch keine zuverlässigen Schlüsse über den früheren Verlauf der Naturvorgänge ziehen. Mit Hilfe des Experiments aber soll deren Kenntnis gefördert werden. Man will sichere Angaben über die Auslösungsursachen bei Faltenbildungen (aufrechte, liegende Falten, Faltenüberschiebungen), dann auch solche für Überfaltungs- und Überschiebungsdecken. Die erstere Art der Vorgänge läßt sich in dieser Hinsicht noch verhältnismäßig leicht übersehen. Es fehlen dagegen die näheren Anhaltspunkte bezüglich der Entstehungsursachen für Überfaltungs- und Überschiebungsdecken, ebenso auch diejenigen für den Grad der Beeinflussung, den Hebungen, Senkungen und andere Faktoren dabei ausüben können. Der beste Ausweis hierüber kann aber durch Experimente erfolgen, wenn deren Anordnung sich auf eine zuverlässige Grundlage stützt. Von den verschiedensten Versuchen nun, die bis jetzt schon zur Wiedergabe tektonischer Gebilde im Modell unternommen wurden, sei hier in Kürze folgendes erwähnt:

[1] W. Voigt, Abh. d. Gött. Ges. XXXVI, 1880; XXXVIII, 1892.

[2] Angabe nach Winkelmanns Handbuch S. 872.

Hall[1] hat in primitiver Weise übereinandergelegte Tuchstreifen beschwert und das Ganze gepreßt. Favre[2] verwendet eine gestreckte Kautschukplatte, die er auf Lehmlagen aufträgt und diese sich dann langsam zusammenziehen läßt. Daubrée[3] prüfte eine Reihe von Gesteinen auf ihre Festigkeitseigenschaften und die Form ihres Bruches hin und verglich damit das Verhalten weicher Massen, denen künstlich schieferige Struktur gegeben worden war. Er gelang so zu gewissen Anhaltspunkten über die Richtung gebirgsbildender Kräfte. Die dem Tone beigemengten Glimmerschuppen und Blättchen, diese von 4 bis 5 cm Kante, ordneten sich bei der Auspressung regelmäßig an[4]. H. M. Cadell[5] schichtete Sand und Gipspulver im feuchten Zustand übereinander und ließ seitliche Drucke auf diese Masse ausüben. Seine Experimente zeigen jedoch den Übelstand, daß die Verschiebungen innerhalb der Masse sich ganz unzureichend fortpflanzten, so daß nur eine Aufstauung direkt an der Druckfläche erfolgte. Die Versuchsergebnisse übertrug er dann auf die ihnen ähnlichen Bilder in der Natur, um so Gesetzmäßigkeiten zu finden zwischen den tektonischen Vorgängen und ihrer auslösenden Ursachen. Reyer[6] untersuchte die Deformation von Lehmschichten, auf die er einen seitlichen Druck ausüben ließ und zwecks quantitativer Feststellungen die eine Seitenfläche in Quadrate einteilte. Er beobachtete die Verschiebung ihrer Mittelpunkte. Seine Experimente ergaben, daß das Material in den steileren Teilen, den Schenkeln, gestreckt, an den Umbiegungsstellen dagegen, in den Sätteln also, gestaut wurde. B. Willis[7] ist der Ansicht, daß weiche, plastische Massen sich am besten zu geologischen Versuchen eignen. Er verwendete deshalb Wachs, welches mit Terpentinöl untermischt wurde. Dem Gemenge fügte er feste Stoffe bei, um den erforderlichen Härtegrad zu erhalten. Seine Versuche sind nach bestimmten Ge-

[1] Trans. Roy. Soc. VII (Edinb. 1814), 84. Pog, Ann. XXXVII (1836), 273.

[2] C. R. LXXXVI (1878) 1093; Nature, XIX, 104.

[3] Experimentalgeologie, Paris 1879.

[4] Siehe II. Teil.

[5] Exper. Researches in Mountain Building Transaction of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXXV, Febr. 1888.

[6] Siehe Lit. Reyer, Theoretische Geologie.

[7] The Mechanics of the Appalachian Structure. Geological Survey Thirteenth Report, Washington 1893.

sichtspunkten angeordnet. Es wurden die bei einem tektonischen Vorgange vermutlich wirkenden Kräfte im kleineren Maßstabe im Experiment zur Auslösung gebracht, und der Vergleich des Versuchsergebnisses mit dem Naturbilde sollte die Richtigkeit der Annahme entscheiden. Sein systematisches Vorgehen führte ihn zu Schlüssen, die bei seinen wohldurchdachten Anordnungen diesen einige Sicherheit verleihen. Die Beschreibung und Ergebnisse seiner Versuche sind in der genannten Schrift ausführlich enthalten. - - Noch von verschiedenen, andern Seiten aus ist eine experimentelle Behandlung des genannten Gegenstandes erfolgt. — W. Paulcke[1] hat seine Versuche in großem Maßstabe ausgeführt. Abwechselnd verwendete er dazu härtere und weichere Gips- bzw. Tonschichten. Um die Drucke, die je nach der Tiefe infolge des Eigengewichts der überlagernden Massen sich ergeben, ebenfalls auf das Modell übertragen zu können, bedurfte es einer besonders starken, künstlichen Belastung. Mit seinem Apparat konnte er diese bis zu 3000 kg steigern. Um die Vorgänge in noch tiefer liegenden Schichten experimentell wiederzugeben, mußte er also die ursprüngliche Belastung erhöhen. Das Verhältnis zwischen den Festigkeiten des Modellmaterials und der Belastung einerseits im Vergleich zur Materialkonsistenz in der Natur für die Schichten der betrachteten Tiefenlagen anderseits hatte er angenähert geschätzt. Als abzubildenden Gegenstand legte er seinen Experimenten verschiedene Breitenzonen des Jura zugrunde, und es ergab sich als Resultat, daß die Profile seiner endgültigen Formen mit jenen des Jura zum Teil weitgehende Ähnlichkeit aufwiesen.

Wie schon angegeben, mangelt den bisherigen, tektonischen Experimenten noch die präzise Grundlage. Weit überstehende Horste und Hohlräume unter den Falten sind Beweise dafür, daß das verwendete Material oft den mechanisch ähnlichen Anforderungen nicht entsprach, daß also die Spannungsverteilung in der Masse keine natürliche war und das betreffende Experiment nur teilweise zur Lösung der gestellten Aufgabe beitrug. Würden darum die oben eingehend erörterten, theoretischen Forderungen in den Anordnungen mitberücksichtigt

[1] Kurze Mitteilungen über tektonische Experimente. Jahresb. und Mitteilungen des Oberrhein. Geolog. Vereins 1911. — Das Experiment in der Geologie. Festschrift, Großh. Techn. Hochschule, Karlsruhe 1912.

werden, so könnte man damit die Resultate wohl noch erheblich verbessern.

1. Herstellung des Materials mit den geforderten Eigenschaften.

Wie die Theorie zeigt, ist nur eine solche Materialmischung praktisch verwertbar, der man außerordentlich geringe Festigkeiten geben kann: dann wird das Modell wirklich in eine mechanisch ähnliche Übereinstimmung mit den Verhältnissen in der Natur zu bringen sein. Offenbar lassen sich nun die stark herabgesetzten Festigkeiten des Modellmaterials umso leichter erreichen, je größer die Dichte der herzustellenden Mischung ist. Sie kann ungehindert selbst diejenige des Materials in der Natur beliebig übersteigen, wenn sie nur entsprechend in Rechnung gezogen wird. Bei großer Dichte und geringer Festigkeit ist ferner auch leicht der verlangte, hohe Grad von Plastizität zu erreichen. Gerade letztere charakterisiert die richtige Modellmischung. Sie gibt uns ein Mittel an die Hand, ohne weitere Rechnung, lediglich unter Berücksichtigung des Verkleinerungsmaßstabes einen direkten Vergleich mit der Natur anstellen zu können: Die gebirgsbildenden Kräfte lassen kaum freiliegende Decken und weit überspringende Horste entstehen. Vielmehr bringt das Eigengewicht der sich verschiebenden Teile diese schon weit früher zum Bruch, oder deformiert ihre untere Masse jeweils in dem Grade, daß solche Erscheinungen nicht auftreten können. Die beoachteten Bruchlinien sind nur von geringer Ausdehnung nach der Tiefe zu. Sie treten aber häufig auf, weil, wie es auch die Rechnung angibt, das weniger belastete Gesteinsmaterial nur eine geringe Durchbiegung erträgt. Die Modellmasse muß also nach erfolgter Deformation ebenfalls von Rissen durchzogen sein. (Sie sind in den am Schlusse beigegebenen Zeichnungen weggelassen.) In der Natur werden solche 400—1000 Meter unterhalb der Erdoberfläche in nennenswerter Ausdehnung nicht mehr beobachtet. Überträgt man diese Verhältnisse auf das Modell, so ergibt sich also beispielsweise beim Verkleinerungsmaßstab $\frac{1}{75000}$ eine Tiefe von 0,5 bis 1,3 cm. Für andere Maßstäbe sind es andere Größen. — Die folgenden Versuche gaben dieses Verhältnis richtig wieder. — Das tieferliegende Material verhält sich dagegen anders. Infolge des Gewichts der über-

lagernden Massen wird dieses mit zunehmender Tiefe mehr und mehr plastisch, um allmählich den Charakter einer zähflüssigen Masse anzunehmen. — Nähere Ausführungen hierüber werden an anderer Stelle erfolgen. —

Da nun das Modell, dessen Material den nach der Rechnung geforderten Bedingungen genügte, diesem Gesichtspunkte entsprach, so ist auch aus diesem Grunde anzunehmen, daß die Theorie annähernd auf die Verhältnisse in der Natur übertragbar ist. Ein weiterer, wichtiger Punkt, der ferner bei der Modellkonstruktion sehr in Rechnung gebracht werden muß, ist der, daß man die Formveränderung des Modellmaterials ohne besondere, künstliche Beihilfen, wie etwa durch Beschweren der Oberseite und anderes, sich vollziehen läßt. Die Übereinstimmung des Versuchsergebnisses mit bestimmten, natürlichen Verhältnissen kann doch wohl umso weniger angezweifelt werden, je natürlicher der Vorgang im Modell sich abspielte. Die Ergebnisse sollen die Beobachtungen in der Natur kontrollieren. Das Material ist also möglichst nur dem Einflusse seines eigenen Gewichtes und bestimmt gerichteten, seitlichen Drucken auszusetzen. Weiterhin wird die Richtigkeit der Übertragung eines Ergebnisses auf die Natur aber besonders dann fraglich, wenn sich unter den entstandenen Falten Hohlräume ausbildeten. Hier fehlte die Kraft eines teilweise nachgibigen Widerlagers, so daß die Druckverteilung eine von der natürlichen vielleicht weit abweichende werden mußte. Nicht zu unterschätzen ist ferner der Umstand, daß für jeden andern Maßstab auch die reduzierten Festigkeiten, die mit Hilfe der angegebenen Formeln jeweils ausgerechnet werden können, verschiedene sind.

Unter Berücksichtigung all der genannten Faktoren ist es nun verständlich, daß nicht jedes Material mit demselben Vorteil zur Modellkonstruktion herangezogen werden kann. Das Eigengewicht muß von solcher Größe sein, daß es erheblich zur Geltung kommt. Dem pulverisierten Blei ist wegen der Gefahr der spezifischen Ablagerung beim Herstellen des Modells und ebenso wegen seines hohen Kostenpunktes (Katalog der chemischen Fabrik E. d. Haën, Seelze in Hannover, Blei, pulverisiert für Akkumulatoren à kg 1,40 Mk.) das Eisenpulver (Nr. 4, technisch, 100 kg 35 Mk.) entschieden vorzuziehen. Genau ausprobierte Mengenverhältnisse von Paraffin, Maschinenöl und einer noch näher

zu beschreibenden Ramsayfettmischung wurden bei zirka 100° mit Eisenpulver vermengt, und es konnte so eine Masse hergestellt werden, die mit jener in der Natur in mechanisch ähnlichem Sinne verhältnismäßig gut übereinstimmte. Der verlangte Grad der Plastizität wurde erreicht mit Hilfe von Ramsayfett. Es bestand aus 1 Teil Guttapercha, 1 Vaseline und 5 Paraffin, das in 100-facher Gewichtsmenge (in *g*) ursprünglich etwa fünf Stunden lang auf ungefähr 250° Temperatur gehalten wurde. Als richtiges Mengenverhältnis ergab sich nun das folgende:

900 (Eisenpulver) :
135 (Maschinenöl) :
6 (Paraffin) :
1 (Guttaperchamischung),

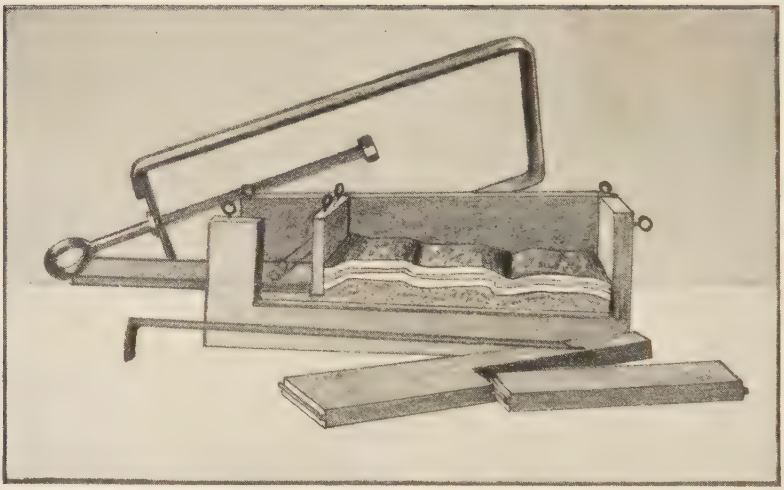
was für den Verkleinerungsmaßtsab $\frac{1}{25000}$ eine dem Granit entsprechende Masse darstellt. Für Kalkstein sind die Mischungsverhältnisse gegeben durch: 900: 145: 5: 1. Zur Feststellung der Deformationen innerhalb derselben Masse und derjenigen der verschiedenen Schichten waren nun solche Zwischenlagen notwendig, die durch eine besondere Farbe von der schwarzgrauen Eisenpulvermischung sich unterschieden. Brauchbar erwiesen sich 500 (Bleipulver) : 500 (Eisenoxyd) : 300 (Maschinenöl) : 1 (Guttaperchamischung) für rot und für grün bei Verwendung von Chromoxyd dieselben Verhältnisse; aber an Stelle von 300 Gewichtsteilen Maschinenöl sind jetzt nur 200 solcher nötig. Änderungen des Plastizitätsgrades können durch Regulieren der Temperatur erfolgen. Die fertigen Mischungen zeigten einen durchweg gleichartigen Charakter. Sie waren teigartig, ohne sich besonders feucht, keineswegs aber naß anzufühlen. Die durchschnittliche Dichte der Masse, die je nach dem Maßstab etwas variierte, ergab sich zu rund 3. Will man die erhaltenen Modelle präparieren, so eignet sich wohl Leinöl statt Maschinenöl für die Versuche besser. Andere Stoffe, wie Sand, Bimsstein mit Bleipulverzusatz, Kolophonium, feuchter Lehm, Wachs usw. sind für ein Modell unbrauchbar. Die Eisenpulver- und Oxydschichten lassen sich aber für neue Anordnungen wiederholt verwenden, so daß der Kostenpunkt für ein einziges Experiment ein nicht sehr erheblicher Betrag ist, selbst wenn es sich um ein solches größeren Maßstabes handelt. Das für Versuch 5 — siehe S. 51 —

erforderliche Material kostete für die Modellmasse: 30 cm Länge, 10 cm Breite und 1 cm Höhe nur 2 –3 Mk.; es kann bei der nötigen Sorgfalt drei- bis fünfmal wieder verwendet werden.

2. Versuche, die mit Hilfe dieses Materials ausgeführt wurden.

Für die richtige Beurteilung der Versuchsergebnisse, wie sie im folgenden im Längsschnitt wiedergegeben sind, muß dem einen Umstand besonders Rechnung getragen werden, daß nämlich erstere die Erdkruste nicht bis zur Tiefe der Druckausgleichung, welch letztere nach der geothermischen Tiefenstufe etwa 100 km unterhalb der Erdoberfläche erfolgt, darstellen und zwar mit Rücksicht auf die Materialersparnis. Andern Auffassungen zufolge soll die Tiefe der Ausgleichfläche nur 50 km betragen. Der nichtähnliche Maßstab kann jedoch, wie schon angegeben, durch Temperaturänderungen verbessert werden. Die Festigkeiten des Modellmaterials lassen sich aber mit Hilfe der Formeln nicht mehr genau berechnen, sondern direkt nur noch schätzungsweise angeben. Die Versuche sollten lediglich dazu dienen, allgemeine Gesichtspunkte festzustellen. Durch sie kann das Verhalten der Modellmasse bei ursprünglich regelmäßiger, oder bereits unterbrochener bzw. gestörter Lagerung erprobt werden. Es erwies sich auch sehr bald, daß die Beschaffenheit des Untergrundes, die der Trennungsflächen zwischen den Schichten, das Verhalten der Seitenwände des Modellkastens in bezug auf die Reibung und anderes von nicht zu vernachlässigendem Einfluß auf das Versuchsergebnis waren.

Mit einem Modellkasten von 40:20:30 cm inneren Ausmessungen wurde eine Reihe von Experimenten ausgeführt. Als Preßvorrichtung diente eine, zum vollständigen Rechteck umgebogene, verstärkte Eisenblechklammer mit Schraubenmutter, der Führung einer Schraube mit kleiner Ganghöhe. - Ein ganz langsames Pressen ist aus den früher angegebenen Gründen unbedingt erforderlich —. In die eine Seitenwand war ein doppelter Schieber eingeschnitten, der, da hier die Klammer eine entsprechende Ausbuchtung zeigte, während des Versuches nach Belieben herausgezogen werden konnte und es so ermöglichte, den Vorgang in all seinen Phasen ungehindert verfolgen zu können. Mittelst Winkelbändern wurde dem Schieber die notwendige Führung gegeben. Statt der einen Stirnwand können gleichzeitig beide

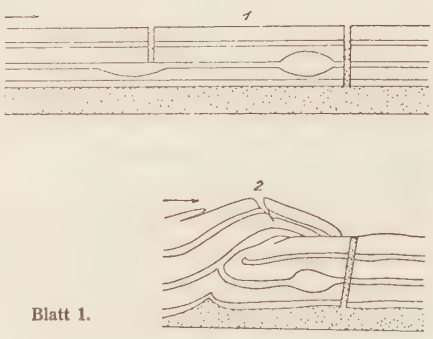


Beispiel für eine einfachen Versuchsanordnung.

lose gemacht werden. In dieser Form wäre der Apparat für Demonstrationszwecke in der Schule verwendbar. Der Preis des Holzkastens würde so mit Zubehör den von 10 Mk. nicht übersteigen. Für wissenschaftliche Zwecke ist aber ein solcher nicht vollständig ausreichend. Jedenfalls würde die Herstellung eines verbesserten Typs, der für alle möglichen Fälle als geeignet bezeichnet werden kann, jedoch keine allzu erheblichen Schwierigkeiten bieten.

Als Untergrund war ein Material notwendig, das den Druck möglichst allseitig fortpflanzt. Sand oder auch Auschußglasperlen, beide in Öl, sind hierfür wohl brauchbar. Sie entsprechen aber der einen Anforderung nicht, daß nämlich ihre Dichte nicht zum wenigsten ebenso groß ist als die der Mischungen; doch sie haben den Vorteil großer Billigkeit. Für eine ungestörte Druckfortpflanzung war die Wandreibung ebenfalls sehr hinderlich. Sie konnte aber erheblich abgeschwächt werden durch lose Nessel- oder Battisttucheinlagen, da diese eine außerordentlich geringe Steifigkeit und Reibung besitzen. Auf diese Weise gelang es ferner, die Vertikalkomponente der Bewegung an den Stirnflächen beinahe in ihrer ganzen, ursprünglichen Größe zu erhalten. Bei breiteren Kasten braucht man jenes Hilfmittel jedoch nicht. Ebenso diente eine Einlage als Trennungsfläche zwischen Untergrund und Schichtensystem lediglich dazu, bei der Wiederverwendung des Materials die Arbeit zu erleichtern.

Die so ausgeführten Versuche, die wegen der Tiefenverkürzung nicht wie die Theorie den Anspruch auf volle Exaktheit erheben können, sollen im folgenden nun kurz beschrieben werden[1].

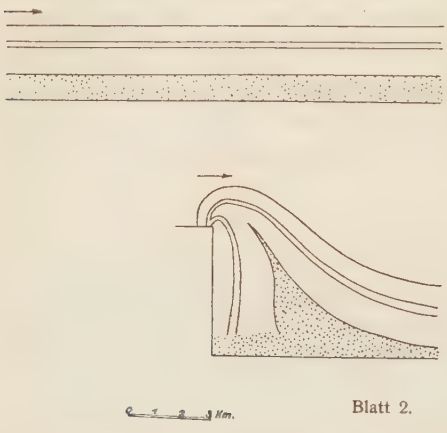


Blatt 1.

Blatt 1: Die mit Chromoxyd ausgefüllte Bruchlinie rechts blieb also wirkungslos, während die mit Sand

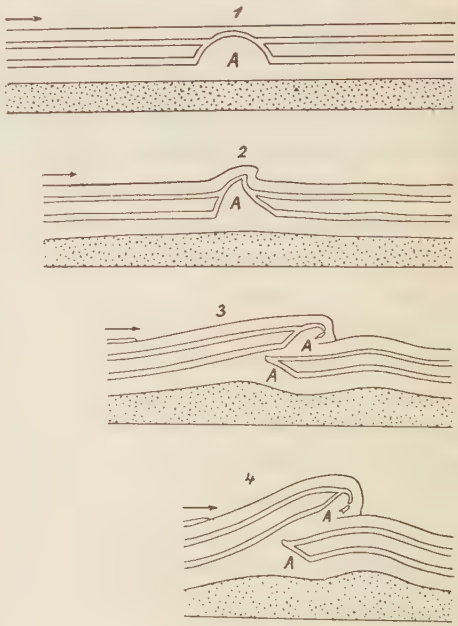
[1] Diese Reproduktionen lassen viele Einzelheiten, wie sie in den Originalen angegeben sind, nicht erkennen. Sie entbehren dadurch des Eindrucks größerer Natürlichkeit.

erfüllte links die Faltung und nachfolgende Überschiebung auslöste. Die drei Schichten größerer Dicke des sechsteiligen Komplexes sind solche aus Eisenpulvermischung, die schmalen Bänder dagegen Einlagen mit Eisenoxyd bzw. Chromoxyd als Hauptbestandteile. — Entsprechendes gilt auch für die folgenden Beispiele. —



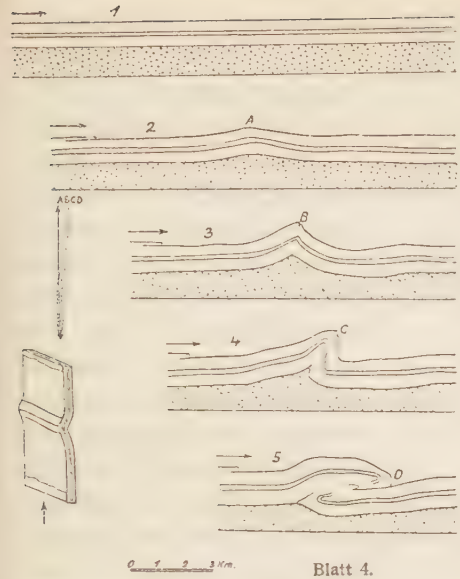
Blatt 2.

Blatt 2: Dieser Versuch unterscheidet sich vom vorhergehenden und allen folgenden dadurch, daß sehr rasch gepreßt wurde — nahm im ganzen etwa 5 Minuten in Anspruch, bei den übrigen Experimenten dagegen 4—5 Stunden. — Bei dieser, für die natürlichen Vorgänge im übertragenen Maßstab weit übertriebenen Geschwindigkeit der Verschiebungen kam die Trägheit des Materials noch zu sehr zur Geltung, daher die Faltung in Richtung der beweglichen Druckfläche. Die steile Abschlußwand links wurde durch den Schieber veranlaßt.



Blatt 3.

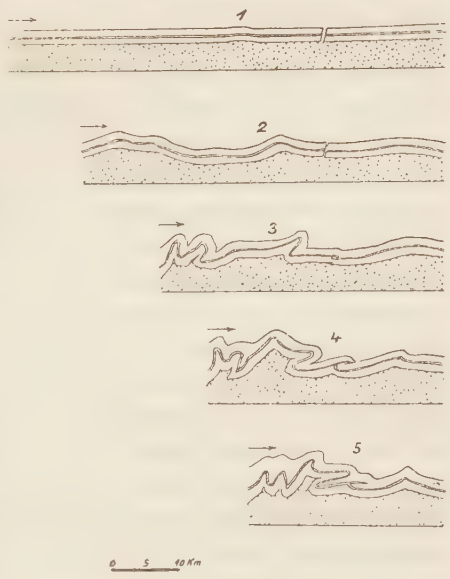
Blatt 3: Das Granitmassiv in der Mitte hemmte die Bewegung; die Neigung zur Ausbildung einer Falte war nur ganz gering; dagegen vollzog sich die Ablösung, die hernach zur Überschiebungsdecke führte, sehr rasch. Die mittlere Eisenpulverschicht war mit Glimmerblättchen und kleinen Teilchen aus Pergamentpapier untermischt, die anfänglich in den ver-



Blatt 4.

schiedensten Richtungen durcheinander lagen. Das Versuchsergebnis zeigte, daß die in der Masse eingebetteten Scheibchen durchgängig parallel sich anordneten. Ihre gemeinsame Richtung verlief unter einem größeren, spitzen Winkel zu den Schichtflächen.

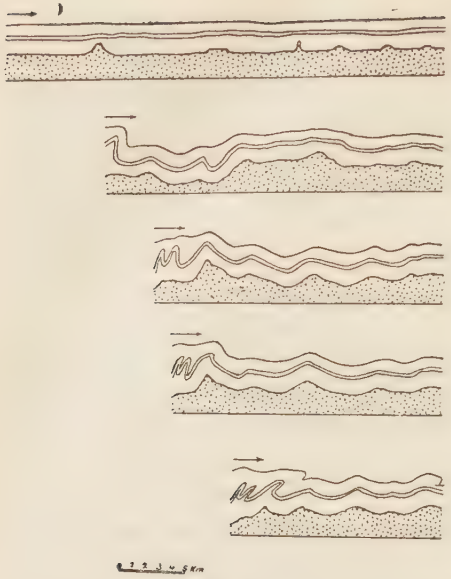
Blatt 4: Die Faltung der ursprünglich ungestörten Schichtenanordnung begann noch etwas rechts von der Mitte. Die nahe der ruhenden Stirnfläche befindlichen Massen nahmen gleich von vornherein an der Bewegung teil. Das Experiment gibt an, wie eine anfänglich aufgerichtete Falte überkippt, sich ablöst, flach gelegt und ausgewalzt wird, um schließlich als Decke hinzugleiten.



Blatt 5.

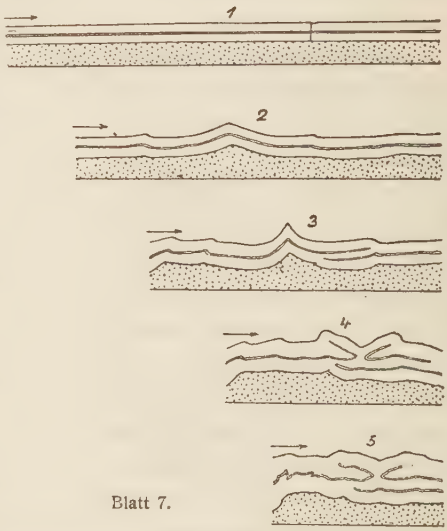
Blatt 5: Das Material dieser Versuchsanordnung war von derselben Zusammensetzung wie das des eben beschriebenen Experiments. Der Versuch wurde aber bei zirka 22° Zimmertemperatur ausgeführt. Sehr interessant ist die eingetretene, ausgesprochene Fältelung, eine Bildung, die sehr natürlich aussieht. Die Faltungen mit der teilweisen Überschiebung haben eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Juratyp.

Blatt 6: Hier wurde die Eisenpulvermischung direkt auf den Untergrund, Sand in Öl, aufgetragen, also keine Tucheinlage



Blatt 6.

verwendet. Die spezifisch leichtere Untergrundmasse drang ursprünglich in Diskontinuitäten ein, schuf sich weitere Bahn und veranlaßte schließlich die aus der Zeichnung ersichtlichen Aufschwellungen. Bei größerer Sorgfalt lassen sich, wenn man überhaupt Wert darauf legt, auch diese Unregelmäßigkeiten leicht vermeiden. Der Übergang der Festigkeiten zwischen Untergrund und Eisenpulvermasse ist jetzt weit natürlicher; denn letztere absorbiert Öl der Untergrundmasse. Damit ist allerdings die Feststellung eines etwas andern Mischungsverhältnisses zum voraus notwendig. Im Versuch ist die Fältelung wiederum eingetreten, wenn sie im Vergleich zu der vorhin auch nicht so regelmäßig erfolgte. Die Falten sind teils steile, teils überhängende.



Blatt 7.

Blatt 7: Dieses eigentümliche Versuchsergebnis ist auf den Umstand zurückzuführen, daß zunächst langsam, dann kurze Zeit bedeutend rascher und hernach wieder im früheren Tempo gepreßt wurde. Die anfänglich schwach nach rechts überhängende Falte in der Mitte stellte sich senkrecht; die Schenkel wurden auseinandergezerrt und schließlich zurückgefaltet. Die Figur 5, als fertiges Naturgebilde vor uns,

würde allein kaum eine derartige Entstehungsweise vermuten lassen.

Die Versuche zeigen, daß bei horizontal wirkenden Druckkräften nur Faltungen und Überschiebungen auftreten, nie aber Brüche und Verwerfungen entstehen. Erstere werden demnach wohl durch Zusammenschub der Erdkruste infolge von Kontraktion veranlaßt, letztere entsprechend durch Zerrung bei lokaler Dilatation. Durch entsprechende Abänderung des Bodens des Modellkastens — indem man ihn etwa streifenweise durchlöchert und die Öffnungen entweder durch ganze oder halbteilige Schieber, die einerseits bzw. beiderseits herausgezogen werden können, einzeln verschließbar macht, um dadurch Untergrundmasse beliebig entziehen oder weitere hinzu pressen zu können — läßt sich auch letztere Möglichkeit in kleinem Maßstab experimentell wiedergeben. Im kleinen ausgeführte Versuche weisen also schon eine vielfältige Versuchsmöglichkeit auf und geben selbst tektonische Einzelheiten wieder. Wünschenswert wäre es allerdings, wenn die Experimente in größerem und allseits richtigem Maßstabe zur Ausführung gelangten. Ein Modell von 1 m Länge, zirka 20—30 cm Breite und etwa 60 cm Tiefe, was beim Maßstab $\frac{1}{75\,000}$ einem Naturkomplex von 75 : 15—38 : 50 km entspricht, könnte wohl allen theoretischen Forderungen genügen. Mit zunehmender Größe wird der Apparat aber unhandlicher und noch mehr die Ausführung des einzelnen Experiments zeitraubender. — Ein vorhin beschriebener Versuch läßt sich bequem in einem Tage vollkommen durchführen. — Es wäre alsdann zu entscheiden, ob die jeweilige Mühe beim kleineren und größeren Modell zu den entsprechenden Erfolgen auch in annehmbarem Verhältnis bleiben, oder ob das kleinere Modell allein schon Schlüsse von genügender Sicherheit zuläßt. Diese Frage kann jedoch am besten mit Hilfe eines maßstabsgerechten Modelles gelöst werden. Die bisher beschriebene Versuchsart läßt aber, da sie sich auf eine exakte Theorie stützt, eine noch weitgehende Vervollkommnung der Experimente, die, wie die Beispiele zeigen, von Fall zu Fall wesentliche Fortschritte bedeuten, in besonderer Weise erhoffen.

Zweiter Teil.

Zur Theorie der Parallelstellung von Blättchen in Flüssigkeiten.

I. Begründung dieser Frage und allgemeine Voraussetzungen.

Die parallele Anordnung von blätterigen Gemengteilen ist nicht allein eine typische Erscheinung für die Sedimentbildungen, sondern sie zeigt sich ebenso bei Gesteinen anderer Natur, so bei der großen Masse der kristallinen Schiefer. Man suchte nach der Ursache dieser eigentümlichen Lagerungsweise. Becke[1] und hernach auch andere haben für letztere das Prinzip von Riecke angegeben. Dieser folgert nämlich, daß gepreßte Stellen eines Kristalls aus thermodynamischen Gründen stärker löslich sein müssen als die mechanisch nicht beanspruchten. Innerhalb der gesättigten Mutterlauge muß sich dieser daher auf der einen Seite lösen und auf der andern weiterwachsen. Ein Kristall würde damit tafeligen Charakter annehmen, und entsprechend müßte ein im Umkristallisieren begriffenes Gestein schieferige Struktur erhalten. Nun kann aber auch der Fall eintreten, daß, wie O. Mügge[2] näher ausgeführt hat, gar kein Druckgefälle vorhanden ist. Ferner müßte die kristallographische Orientierung unabhängig von der Schieferungsebene sein, während der umgekehrte Fall in Wirklichkeit viel häufiger zutrifft und das Rieckesche Prinzip darum versagt. Es haben nun die kanadischen Geologen, vor allem Adams und Cother[3], ferner auch J. Koenigsberger und andere darauf hingewiesen, daß die regelmäßige Anordnung des Glimmers wohl auf bestimmte Bedingungen bei

[1] Denkschrift der Wien. Akad. d. Wiss., 1903.

[2] Über metamorphische Prozesse in den kristallinen Schiefern; Nachrichten d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1911, 2. Heft.

[3] An Investigation into the Elastic Constants, Washington, June 1906.

der Ausscheidung aus dem ruhenden, aber auch auf die langsame und kontinuierliche Bewegung des flüssigen Magmas zurückgeführt werden kann. Es soll im folgenden versucht werden, diese Behauptung mathematisch zu begründen.

Der Glimmer wird als eines der ersten Mineralien aus dem glutflüssigen Magma des Tiefengesteins ausgeschieden. Wenn aber die Flüssigkeit einmal bei dieser Abscheidungstemperatur angelangt ist, so wird sie schon stark zähflüssiger Natur sein. Man hat es also mit der langsamen Bewegung eines angenähert symmetrischen Körpers zu tun, der seiner eigenen Schwere unterliegt und sich in ruhender oder bewegter Flüssigkeit frei bewegen kann. Die Dichte des erstarrten Magmas ist im Durchschnitt 2,5, die des Glimmers bis 3,2, so daß dessen Eigengewicht immerhin noch zur Wirkung kommen wird.

Der Einfachheit halber besitze ein solches Blättchen die Form einer sehr dünnen, streng genommen unendlich dünnen, kreisförmigen Lamelle, die unter der Einwirkung ihrer eigenen Schwere innerhalb einer ruhenden und vorläufig noch idealen Flüssigkeit von unendlicher Ausdehnung sich selbst überlassen sein soll. Die Massenpunkte des Blättchens beschreiben gewisse Bahnen. Was interessiert, ist die Lage der Querfläche des Blättchens nach Ablauf einer gewissen Zeit zu irgend einem, im Raume festen Koordinatensystem. Es handelt sich also darum, die stabilen Eigenschaften des Blättchens in bezug auf feste Achsen in diesem festzustellen. Zu diesem Zwecke soll der Begriff der Stabilität kurz wiedergegeben werden, und an Stelle der vielen, wechselnden Definitionen seien hier nur die Sätze von Thomson-Tait[1] angeführt: „Ein System heißt dann stabil, wenn es, nachdem man dieses unendlich wenig aus einer besondern Gleichgewichtslage entfernt und dann sich selbst überlassen hat, hin und her vibriert, ohne jemals mehr als eine unendlich kleine Abweichung aus dieser Gleichgewichtslage in irgend einem seiner Teile zu erfahren. Analoges gilt für die Stabilität der Bewegung. Letztere heißt für ein System stabil, wenn jede mögliche, unendlich kleine, konservative Störung der Bewegung (z. B. Störung in der Bewegungsrichtung) das System in endlicher Zeit und mit einer unendlich kleinen Abweichung etc. wieder zu einer der ungestörten Bahn angehörenden Konfiguration zurückbringt."

[1] Handb. d. theoreth. Physik I, 291 u. 347; II, 764.

1. Unendlich kleine Bewegungen.

Das System, welches hier der Rechnung unterzogen wird und welches auf die Eigenschaften der Stabilität der Bewegung hin zu untersuchen ist, besitze ursprünglich sehr kleine, streng genommen unendlich kleine Geschwindigkeiten. Mit dieser Annahme sind die zwei folgenden Vereinfachungen erreicht, nämlich: Wenn mehrere Ursachen auf einen materiellen Punkt bzw. auf ein materielles System einwirken, deren jede für sich und die ebenso in ihrer Gesamtwirkung unendlich kleine Verschiebungen erster Ordnung hervorrufen, so erhält man dieselbe resultierende Bewegung, ob die Ursachen nun gleichzeitig oder nacheinander wirken. Dasselbe läßt sich kürzer so ausdrücken: Die Wirkungen superponieren sich, da unendlich kleine Größen zweiter Ordnung ohne Beeinträchtigung der Genauigkeit vernachlässigt werden können. Mit dieser Annahme werden ferner Diskontinuitäten, die in unmittelbarer Nähe des Blättchens sonst bei endlichen Systemänderungen auftreten würden, vermieden. Damit vereinfacht sich die Betrachtung erheblich.

Wie weit die genannte Voraussetzung der relativ kleinen Verschiebungen im Falle der Bewegung des Glimmerblattes im glutflüssigen Magma zutrifft, ergibt sich kurz durch Vergleich mit einer andern, anschaulichen Tatsache. Die Wolken unterliegen — am deutlichsten bei ruhiger Luft — in ihrer Bewegung nach der Tiefe zu dem Gesetz der Schwere. Letztere ist eine beschleunigende Kraft. Die Nebeltröpfchen müßten also mit zunehmender Tiefe eine Beschleunigung erfahren. Infolge der Reibung der Luft wird die beschleunigende Kraft aber sehr bald gleich dem Reibungswiderstande, so daß die Bewegung zu einer solchen mit gleichförmiger Geschwindigkeit wird. So erklärt sich's, daß Wolken innerhalb mehreren Stunden oft nur um wenige Zentimeter fallen. Die Wirkung der eigenen Schwere kommt also immerhin noch, wenn auch nur im geringem Maße, zur Geltung.

2. Kontinuierlich wirkender Impuls.

Das Glimmerblatt mit seinem geringen Gewicht bewegt sich in der zähen Flüssigkeit des Magmas. Seine Bewegung, von jenem herrührend, wird also auch eine solche von konstanter Geschwindigkeit sein. Mit letzterer Voraussetzung ist in gewissem

Sinne die innere Reibung der Flüssigkeit scheinbar eliminiert. Wie nun auch die Bewegung eines Systems in irgend einem Zeitpunkte beschaffen sein mag, immer kann sie aus der Ruhe heraus durch eine bestimmte, impulsive Schraube [1] ersetzt werden von der Art, daß ihre Wirkung diese momentane Bewegung hervorbringt. Zieht man den Einfluß der Zähigkeit noch in das System mit hinein, so wird eben jene Bewegung gleichförmiger Geschwindigkeit dauernd dadurch erhalten, daß ein kontinuierlich wirkender Impuls vorausgesetzt wird. Bei Einwirkung äußerer Kräfte ändert sich nun dieser in derselben Weise wie das Moment eines endlichen, dynamischen Systems [2].

II. Anwendung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen auf die Bewegung der kreisförmigen Lamelle in ruhender Flüssigkeit.

1. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen.

Rechnung und Experiment zeigen, daß ein dreiachsiges Ellipsoid, das nach gewissen Richtungen hin in Bewegung gesetzt wird, diese auch beibehält. Man spricht in diesem Falle von Bewegungen permanenter Translation. Unter diesen können sich wieder solche besonders auszeichnen, die zugleich stabile Achsen für den Körper sind. Auf deren Feststellung kommt es hier auch nur an. Sie lassen sich angeben mit Hilfe der Lagrangeschen, allgemeinen Bewegungsgleichungen. Diese sind der Ausdruck für die gesamte, kinetische Energie des Systems, bestehend aus der des Körpers und derjenigen der mitbewegten Flüssigkeit. Sie lauten in ihrer allgemeinen Form [3].

$$2T = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2A'vw + 2B'wu + 2C'uv$$
$$+ Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 + 2P'qr + 2Q'rp + 2R'pq$$
$$+ 2p(Fu + Gv + Hw) + 2q(F'u + G'v + H'w) +$$
$$2r(F''u + G''v + H''w),$$

wo die 21 Koeffizienten $A, B \ldots G'', H''$ Konstanten sind; u, v, w bedeuten die Translationsgeschwindigkeiten des Ursprungspunktes eines im Körper festliegenden und mit diesem sich bewegenden Koordinatensystems in bezug auf die jeweiligen Lagen dieser

[1] Lamb, Lehrbuch d. Hydrodyn., 3. Aufl., S. 196.
[2] Lamb a. a. O., 6. Aufl., S. 119. [3] Ebd.

Achsen; p, q, r sind die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten um diese. Es seien ferner $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$ die Komponenten der Kraft und des Kräftepaares des im Raume festliegenden Impulses. Mit X, Y, Z, L, M, N sollen diejenigen des Systems der äußeren Kräfte bezeichnet werden. Die Impulskomponenten können durch die u, v, w, p, q, r ausgedrückt werden. Sie sind lineare Funktionen der ersteren; T ist also eine homogene Funktion zweiten Grades der Größen $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$. Die Bewegungsgleichungen nehmen dann folgende Form an[1]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta u} = r\frac{\delta T}{\delta v} - q\frac{\delta T}{\delta w} + X$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta v} = p\frac{\delta T}{\delta w} - r\frac{\delta T}{\delta u} + Y$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta w} = q\frac{\delta T}{\delta u} - p\frac{\delta T}{\delta v} + Z$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta p} = w\frac{\delta T}{\delta v} - v\frac{\delta T}{\delta w} + r\frac{\delta T}{\delta q} - q\frac{\delta T}{\delta r} + L$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta q} = u\frac{\delta T}{\delta w} - w\frac{\delta T}{\delta u} + p\frac{\delta T}{\delta r} - r\frac{\delta T}{\delta p} + M$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta r} = v\frac{\delta T}{\delta u} - u\frac{\delta T}{\delta v} + q\frac{\delta T}{\delta p} - p\frac{\delta T}{\delta q} + N.$$

2. Richtungen permanenter Translation.

Wird der Körper gezwungen, sich mit konstanter Geschwindigkeit u, v, w ohne Rotation zu bewegen, so reduzieren sich die Flüssigkeitsdrucke auf ein Kräftepaar, welches gegeben ist durch:

$$X = Y = Z = o,$$
$$L = w\frac{\delta T}{\delta v} - v\frac{\delta T}{\delta w};\ M = u\frac{\delta T}{\delta w} - w\frac{\delta T}{\delta u};\ N = v\frac{\delta T}{\delta u} - u\frac{\delta T}{\delta v},$$

wo

$$2T = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2A'vw + 2B'wu + 2C'uv$$

ist und in $T = T_1 + T$ das T die kinetische Energie der Flüssigkeit allein bedeutet. Wird der Körper in einer der Richtungen permanenter Translation in Bewegung gesetzt, so behält er diese bei, gleichviel, ob stetige oder unstetige Kräfte nach dieser Richtung wirken. Jede solche Wirkung kann auf diejenige von Impulsen zurückgeführt werden, welche die augenblickliche Bewegung aus der Ruhe heraus verursachen. In diesen Impulskräften ist dann gleichzeitig der Effekt der äußeren Kräfte enthalten. Bei der Wirkung der letzteren ändern sich erstere stetig.

[1] Lamb a. a. O., 6. Aufl., S. 124.

Aus den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen ergeben sich drei Richtungen permanenter Translation als partikuläre Integrale; denn es verschwinden sämtliche rechten Seiten in den genannten Beziehungen, also auch die linken. Da $p = q = r = o$, so bestimmen sich diese Verhältnisse durch:

$$u : v : w = \frac{\delta T}{\delta u} : \frac{\delta T}{\delta v} : \frac{\delta T}{\delta w},$$

worin u, v, w also konstant sind. T ist eine homogene Funktion zweiten Grades von u, v, w; es bleibt immer positiv, weil es die lebendige Kraft bezeichnet. Die Bestimmung der Verhältnisse $u : v : w$ entspricht also der der Hauptachsen eines Ellipsoids $T = const.$, und u, v, w sind die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes. Nimmt man die Achsen derselben parallel denen der x, y, z an, so sind die Richtungen der Hauptachsen des bezeichneten Ellipsoids drei aufeinander senkrechte Geraden, die im Körper festliegen, und längs deren er sich ohne Drehung fortbewegen kann. Beim Glimmerblättchen, welches seiner Gestalt nach einem ausgearteten Rotationsellipsoid entspricht, sind nun alle Richtungen in der Kreisebene gleichwertig und gleichzeitig solcher permanenter Translation; dazu kommt noch diejenige in Richtung der Figurenachse. Aber nur letztere allein wird sich als stabil erweisen.

3. Unendlich kleine, impulsive Störung aus dem stationären Zustande.

Will man von einer streng richtigen Rechnung absehen, ohne jedoch die Richtigkeit des Ergebnisses merklich zu stören, so läßt sich die Stabilität eines Körpers auch mit Hilfe einer angenäherten Methode bestimmen. Das Rotationsellipsoid befinde sich im Zustande der stationären Bewegung, in welchem v, w, p, q, r null sind. Letztere werde jetzt parallel zur x - bzw. zur Figurenachse nur sehr wenig gestört. Der erteilte Impuls veranlasse eine Bewegung, die sehr kleinen, streng unendlich kleinen v, w, p, q, r entspreche. Die ursprüngliche Geschwindigkeit nach der x-Richtung sei ferner u_0, die veränderte $u = u_0 + u_1$. Die geringere Genauigkeit der Methode liegt nun in der Voraussetzung, daß die Werte der Konstanten $A, \ldots . R$ sich durch die impulsive Störung nicht merklich ändern sollen. Ihre Veränderungen, die von den unendlich kleinen Variationen der u, v, w

herrühren, sind dann nur unendlich kleine Größen von der dritten und höheren Ordnung, was aus der Integraldarstellung dieser Konstanten folgt.

Es gelten nun die Beziehungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta u} = r\frac{\delta T}{\delta v} - v\frac{\delta T}{\delta w} \text{ und } 2T = Au^2 + B(v^2 + w^2) + Pp^2 + Q(q^2 + r^2).$$

Aus ihnen folgt:

$$A\frac{d(u_0 + u_1)}{dt} = rBv - qBw, \text{ oder}$$

$$A\frac{du_1}{dt} = o. \text{ In ähnlicher Weise wird:}$$

$$B\frac{dv}{dt} = pBw - rA(u_0 + u_1) = Au_0 r \text{ und}$$

$$B\frac{dw}{dt} = pBw - rA(u_0 + u_1) = Aqu_0 \text{ und}$$

$$P\frac{dp}{dt} = wBv - vBw + rQq - qQr = o,$$

$$Q\frac{dq}{dt} = u_0 Bw - wAu_0 + pQr - rPq = -(A-B)u_0 w,$$

$$Q\frac{dr}{dt} = vAu_0 - Bu_0 v + qPp - pQq = (A-B)u_0 v.$$

Hieraus ergeben sich durch Elimination entsprechender Geschwindigkeitskomponenten die folgenden Beziehungen:

$$B\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{A(A-B)}{R}u_0^2 v = o$$

$$B\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{A(A-B)}{Q}u_0^2 w = o$$

$$Q\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{A(A-B)}{B}u_0^2 q = o$$

$$Q\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{A(A-B)}{B}u_0^2 r = o.$$

Diese Differentialgleichungen sind homogen und vom zweiten Grade in den Geschwindigkeiten. Ihre Lösungen entsprechen periodischen Funktionen der Zeit, und ihr Zusammenhang mit den Koordinaten x', y', z' eines festen Systems im Raume ergibt sich mit Hilfe bekannter Beziehungen. Sie sind aber mit Rücksicht auf die weitere Betrachtung nicht erforderlich. Für die Stabilität des sich bewegenden Rotationskörpers ist nun hinreichend und notwendig, daß die Koeffizienten der v, w, q, r negativ sind, was unter der Bedingung $A > B$ zutrifft. Dann ergibt sich für die Schwingungsdauer T einer kleinen Schwingung z. B.:

$$T = 2\pi\frac{BR}{A(A-B)u_0^2}.$$

Daraus ist ersichtlich, daß die Winkelbewegungen um den Körpermittelpunkt sich nach den Gesetzen eines sphärischen Pendels vollziehen. Nach der Voraussetzung bleiben also die Geschwindigkeiten auch trotz der Störung unendlich klein, und die Schwingungsdauer ist endlich. Die Bedingungen der Stabilität der Bewegung sind also erfüllt, und der Grad der letzteren hängt nur von dem gegenseitigen Verhältnis der Größen A, B, C ab.

4. Die stabilen Achsen der Lamelle.

Die festliegenden Achsen im Körper können ursprünglich beliebig gewählt werden. Die Symmetrieebenen seien gleichzeitig diejenigen durch die Koordinatenachsen. Das Glimmerblatt kann als Rotationsellipsoid mit sehr geringer Dicke angesehen werden. Der Ausdruck für die kinetische Energie bei ersterem ist, wie bereits angegeben:

$$2T = Au^2 + B(v^2 + w^2) + Pp^2 + Q(q^2 + r^2).$$

Die Koeffizienten A, B, P, Q haben nun für die kreisförmige Lamelle die Werte[1].

$$A = \frac{8}{3}\varrho c^3; \qquad P = o;$$

$$B = C = o; \qquad Q = R = \frac{16}{45}\varrho c^5;$$

wo a, c ihre Achsen sind und ϱ deren spezifische Masse bedeutet. Die Formel für die Schwingungsdauer zeigt also, daß bei stärker abnehmendem $B = C$, d. h. bei kleinerer Figurenachse im Körper, auch die Stabilität der Bewegung erhöht wird. Sehr groß ist sie demnach bei der unendlich dünnen Lamelle, wenn die Bewegung in Richtung der Figurenachse erfolgt.

In ganz derselben Weise lassen sich die übrigen Achsen permanenter Translation auf ihre Stabilität hin untersuchen. Es genügt, die Stabilitäts- bzw. Instabilitätsbedingungen für eine der Richtungen in der Äquatorialebene nachzuweisen, da sie alle unter sich bezüglich dieser Eigenschaft gleichwertig sind. Wird die stationäre Bewegung des Körpers also parallel der y-Achse, die mit einer der betrachteten Richtungen zusammenfallen soll, unendlich wenig gestört, so ergeben sich mit Hilfe der Bewegungsgleichungen des vorigen Falles durch zyklische Vertauschung die folgenden:

[1] Lamb a. a. O., 6. Aufl., S. 121.

$$A\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{(A-B)\,B\,v_0^2\,u}{Q}; \qquad P\frac{d^2p}{dt^2} = o;$$

$$B\frac{d^2w}{dt^2} = o; \qquad Q\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{(A-B)^3\,B\,v_0^2\,r}{A}.$$

Die Geschwindigkeiten bleiben wohl unendlich klein; aber die Schwingungszeiten werden sehr groß, also die Abweichungen aus der ursprünglichen Lage endlich, und damit wird die Bewegung instabil und dies umso mehr, je kleiner B und C im Vergleich zu A werden.

Mag nun das Glimmerblättchen augenblicklich eine ganz beliebige Lage innerhalb einer Flüssigkeit inbezug auf ein auf sie bezogenes Koordinatensystem einnehmen, so wird es infolge der Dämpfung durch die Flüssigkeitsreibung, die in den Gleichungen nicht enthalten ist, sich mehr und mehr der stabilen Lage nähern, d. h. mit seiner größten Fläche in die jeweilige Horizontalebene sich einstellen. Die vorangegangenen Gleichungen waren vom allgemeinen Typus:

$$\frac{d^2m}{dt^2} + \beta^2 m = o.$$

Soll die Einwirkung der Reibung nun noch mitberücksichtigt werden, so ist die Gleichung durch das Reibungsglied zu ergänzen. Ihre allgemeinere Form lautet dann:

$$A\frac{d^2m}{dt^2} + \alpha'\frac{dm}{dt} + \beta' m = o,$$

worin m die Variable ist, A den Trägheits-, α' den Reibungs- und β' den Elastizitätskoeffizienten bedeuten. Für die Integration ist bekanntlich die Form: $\frac{d^2m}{dt^2} + 2\alpha\frac{dm}{dt} + \beta^2 m = o$ geeigneter.

Den zahlenmäßigen Ausdruck für die Größe der Reibung aufzustellen, hat hier keinen Zweck; denn es kommt nur darauf an, zu zeigen, in welchem Sinne diese wirkt. Die Differentialgleichung aber ergibt, daß sie das Einnehmen der stabilen Gleichgewichtslage unterstützt. Gewisse, allgemeine Gesetzmäßigkeiten, die hier kurz angeführt werden sollen, ergeben sich ferner aus dem Vergleich der konstanten α und β. Ist $\alpha > \beta$, d. h. ist die Dämpfung eine sehr große, also die Reibung stark, so kommt keine eigentliche Schwingung zustande, sondern das Blättchen nähert sich asymptotisch der stabilen Lage. Die Bewegung ist eine aperiodische, welches auch das Vorzeichen von A und B der in der Lösung vorkommenden Intregationskonstanten sein mag. Ist $\alpha < \beta$,

so ist die Schwingung eine oszillierende aber mit abnehmender Amplitude, und zwar erfolgt die Abnahme in geometrischer Progression. Die Endlage ist wiederum die stabile. Für den Fall $\alpha = \beta$ ergibt sich ebenfalls ein aperiodischer Vorgang, aber mit etwas anderem Verlauf als im Falle $\alpha < \beta$. Zu diesen Winkelbewegungen treten nun noch die translatorischen hinzu. Die daraus sich ergebende, resultierende Bewegung kann mit Hilfe der elliptischen Funktionen näher beschrieben werden.

5. Spezialfall einer solchen Bewegung.

Hier sei ein Beispiel unter vereinfachten Voraussetzungen gegeben. Die Theorie zeigt[1], daß die Achse eines Rotationskörpers, der ohne Drehung um seine Figurenachse in einer Flüssigkeit seine Bewegung beginnt, beständig in einer Ebene bleibt, und jeder seiner Punkte bewegt sich nur parallel dieser. Die Figurenachse führt Oszillationen aus, die denen eines gewöhnlichen Pendels gleichen. Es soll also angenommen werden, daß der Rotationskörper bzw. das Glimmerblatt ohne Rotation um die Figurenachse in einer unendlich ausgedehnten, reibungslosen Flüssigkeit sich so bewege, daß jene immer in einer Ebene bleibe. Die Bewegung kann veranlaßt sein durch einen Impuls von beliebiger Richtung, der durch den Reaktionsmittelpunkt geht und durch ein impulsives Kräftepaar, dessen Ebene die der Impulsrichtung und diejenige der Figurenachse ist. Da beim Blättchen die Schwere wirkt und diese zusammen mit der Reibung einem Impulse von vertikaler Richtung gleichkommen, so ist die genannte Ebene vertikal. Die Annahmen entsprechen also den wirklichen Verhältnissen.

Diese vertikale, feste Ebene falle mit der der $x\,y$ des Körpersystems zusammen. Durch deren spezielle Wahl wird $p = q = w = o$. Dann reduzieren sich die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für einen Rotationskörper zu:

$$A \frac{du}{dt} = r B v;$$

$$B \frac{dv}{dt} = r A u,$$

$$Q \frac{dr}{dt} = (A - B) u v.$$

[1] Lamb a. a. O., 6. Aufl., S. 74.

In der festen Ebene sei das Koordinatensystem der ξ, η festgelegt. Diese selbst sollen die Koordinaten des Körpermittelpunktes bedeuten. Die ξ-Achse zeige vertikal; d. h. sie falle mit der Wirkungslinie des Impulses zusammen. Mit α sei der Winkel bezeichnet, den die x-Richtung des Körpersystems mit dem ξ des festen Raumsystems jeweils bildet. Der Impuls ist eine Bewegungsgröße; A, B sind ihren Dimensionen entsprechend Massen und Q das Trägheitsmoment um die y-Achse.

Es wird also:

$$A u = I \cos\alpha; \; B v = -I \sin\alpha;$$
$$r = \frac{d\alpha}{dt}.$$

Die beiden ersten dieser Beziehungen bedeuten, daß der Impuls im Raume fest ist. Aus der letzteren wird mit Hilfe von $Q\frac{dr}{dt} = (A-B)\,uv$ nun:

$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{A-B}{A\,B\,Q} I^2 \cos\alpha \sin\alpha = -\frac{A-B}{A\,B\,Q} I^2 \sin\beta$, wenn $2\alpha = \beta$ gesetzt wird. Diese Gleichung ist das Bewegungsgesetz eines Quadrantenpendels, d. h. eines Körpers, dessen Bewegung das gleiche Gesetz in bezug auf den Quadranten befolgt wie das gewöhnliche Pendel mit Rücksicht auf den Halbkreis. Die Integration der obigen Gleichung ergibt den Winkel α. Die Werte der ξ und η ergeben sich dann mit Hilfe der Beziehungen:

$$\frac{d\xi}{dt} = u\cos\alpha - v\sin\alpha = I\left(\frac{1}{A}\cos^2\alpha + \frac{1}{B}\sin^2\alpha\right);$$
$$\frac{d\eta}{dt} = u\sin\alpha + v\cos\alpha = \left(\frac{I}{A} - \frac{I}{B}\right)\sin\alpha\cos\alpha = \frac{Q}{I}\frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Da die ξ-Achse mit der Impulsrichtung zusammenfällt, so ist die additive Konstante gleich null; die letztere Beziehung gibt also:

$$\eta = \frac{Q}{I}\cdot\frac{d\alpha}{dt}.$$

Durch die Gleichungen: $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{A-B}{A\,B\,Q} I^2 \cos\alpha \sin\alpha$ werden α, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ als elliptische Funktionen der Zeit dargestellt. Damit sind $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$ bestimmt. — η ist vorhin danach angegeben worden —. Es bleibt immer innerhalb endlicher Grenzen. Die Abszissen ξ lassen sich aus $\frac{d\xi}{dt}$ . . . als elliptische Integrale zweiter Gattung bestimmen. Aus den Beziehungen für $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$ er-

gibt sich nun die Gleichung der Bahnkurve. Es ist

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\ (A-B)\ \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{B\cos^2\alpha + A\sin^2\alpha}$$

und hieraus: $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\ \frac{\frac{d\alpha}{dt}(A-B)\,A\,B\,(B\cos^2\alpha - A\sin^2\alpha)}{I\qquad (B\cos 2\alpha + A\sin 2\alpha)^3}$.

Mit Hilfe dieser Beziehungen läßt sich die Bewegung des Körpers vollständig diskutieren. Die Bahn ist entweder eine oszillierende um eine bestimmte Gleichgewichtslage, oder eine umwälzende. Oszillierend ist sie, wenn $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$, d. h. $\frac{d\alpha}{dt}$ in dem Augenblicke, wo $\alpha = o$ ist, den Wert:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 < I\ \sqrt{\frac{A-B}{A\,B\,Q}}$$

hat und umwälzend im Falle: $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 > I\ \sqrt{\frac{A-B}{A\,B\,Q}}$.

Die Bewegung ist eine dauernd fortschreitende; denn $\frac{d\xi}{dt}$ ändert sein Vorzeichen nicht. Je nachdem von I wächst ξ fortwährend oder nimmt beständig ab. Die ξ-Achse wird durchkreuzt, wenn $\frac{d\alpha}{dt}$ jeweils null wird. Diese Lagen sind gleichzeitig die äußersten. Geht α durch Null, so erreicht η je ein Maximum und ein Minimum. Wird $\frac{d\alpha}{dt} = o$, so finden Wendepunkte statt. Weitere ergeben sich noch aus $B\cos^2\alpha - A\sin^2\alpha = o$, also für

$$tg^2\gamma > \frac{B}{A}.$$

Für die umwälzende Bewegung gilt ferner folgendes: Da $\frac{d\alpha}{t\,d}$ sein Vorzeichen nicht ändert, so geht die Kurve nicht durch die ξ-Achse. Der größte und kleinste Wert der Ordinate werden erreicht, wenn α von o oder $\frac{\pi}{2}$ sich um ein Vielfaches von π unterscheidet. Die Wendepunkte liegen an den Stellen, für die $tg^2\alpha = \frac{B}{A}$ wird. Die Maxima und Minima der Kurve sind gegeben durch:

$$\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)_{\eta_0} = -\ \frac{\frac{d\alpha}{dt}(A-B)\,A}{I\,B} \text{ und } \left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)_{\eta_1} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}(A-B)\,B}{I\,A}.$$

Weil $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{\alpha=o} > \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{\alpha}$ und $A > B$ ist, so muß sie an den höchsten Stellen stärker gekrümmt sein als an den tiefsten.

Die Bilder dieser Bewegungen sind etwa die folgenden:

I und II entsprechen den Verhältnissen $A = 5\,B$. Die Kurve I gibt den Fall einer gestörten, stabilen Bewegung parallel zu einer Achse permanenter Translation an. Die Amplituden sind in der Zeichnung stark überhöht. Die Bahn entspricht einer wellenförmigen Kurve, die den Impuls in Zeitintervallen kreuzt, welche der halben Periode einer Winkelbewegung gleich sind.

Die Kurve II gibt den Fall einer gestörten, labilen, stationären Bewegung starken Labilitätsgrades wieder.

Im Falle einer unendlich dünnen Lamelle wird $\frac{A}{B} = \infty$. Es entstehen also an den höchsten Stellen bei II Spitzen, bei I solche für alle Extremwerte. Die Behandlung des Falles, daß der Rotationskörper von vornherein eine Drehung um seine Figurenachse miterhält, erfolgt in ähnlicher Weise[1]. Jener erhöht die Stabilität des Körpers in Richtung der Drehachse.

Den Gleichgewichtslagen des Pendels $\beta = o$ und $\beta = \pi$ entsprechen die Werte $\alpha = o$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Damit gibt es also bei dieser Bewegung des Körpers in einer Ebene zwei Richtungen permanenter Translation, von denen diejenige, für welche $\alpha = o$ wird, stabil und die Lage, die durch $\alpha = \frac{\pi}{2}$ gekennzeichnet wird, entsprechend der des Pendels eine labile ist. Die geringste Störung veranlaßt im letzteren Falle ein vollständiges Umschlagen. Die Bewegung ist also stabil, wenn die mitbewegte Masse der Flüssigkeit möglichst groß ist. Dies trifft aber dann in besonders starkem Maße zu, wenn die Breitseite des Blättchens vorangeht. In sonst ruhender Flüssigkeit wird also das Blättchen sich schließlich horizontal einstellen.

III. Das Blättchen in bewegter Flüssigkeit.

Der Fall, daß das Blättchen in einer Flüssigkeit mit dauernd derselben Geschwindigkeit in all ihren Teilen sich bewegt, ist mit Rücksicht auf den vorliegenden Zweck nicht wesentlich vom

[1] Lamb a. a. O., 6. Aufl., S. 128.

vorhergehenden verschieden. Die jenen Betrachtungen zugrunde liegende Annahme, daß die Bewegungen verhältnismäßig langsam erfolgen sollen, sei auch hier wieder herangezogen. Dann superponieren sich die Verschiebungen, welche die angreifenden Kräfte einzeln verursachen. Das als gewichtslos gedachte Blättchen wird in der beliebigen Stellung, in der es in die Flüssigkeit hineingebracht wurde, von ihr ohne jede Winkeländerung weitergetragen. Eine Drehung kann also nur durch den Einfluß der eigenen Schwere veranlaßt werden, so daß bei Berücksichtigung beider Faktoren dieselbe endgültige Einstellung wie in dem vorhin ausführlich beschriebenen Falle erfolgt.

Die Verhältnisse, die in der Natur sich im allgemeinen vorfinden, sind aber etwas verschieden von dem eben gegebenen Beispiel. Bekanntlich tritt sehr oft die Erscheinung auf, daß innerhalb der Erdkruste Massenergüsse in die Schichtfugen der Sedimentgesteine eindringen und dort langsam über große Gebiete hin sich ausdehnen. Es liegt also der Fall vor, daß eine zähe Flüssigkeit zwischen parallelen Wänden durchgepreßt wird. Wegen der starken Reibung an den Schichtflächen wird die Geschwindigkeit der Masse mit zunehmender Entfernung bis zur Mitte hin anwachsen. Der in dieser Flüssigkeit auskristallisierende Glimmer unterliegt hinsichtlich seiner Bewegung dann einmal dem Einfluß der ungleichen Flüssigkeitsströmung und ferner seiner eigenen Schwere. Der erstere übt auf das Blättchen ständig ein Drehmoment aus, das mit dessen wechselnder Neigung zur Stromrichtung seinen Wert ebenfalls ändert und dieses in Richtung der größeren Geschwindigkeit zu drehen versucht; denn die Geschwindigkeitsdifferenz bewirkt Druckkräfte, die das genannte Drehmoment zur Folge haben. Der zweite Faktor, die Schwere, begünstigt aber noch die Einstellung nach der Richtung der Horizontalen. Begreiflich ist es darum, daß unter dem Einflusse des letzteren eben die oberen Lagen von horizontalen Gneisadern etwas glimmerärmer werden als die unteren. Inwieweit übrigens die Schwerkraft gegenüber der Strömung jeweils zur Geltung kommt, läßt sich aus der mehr oder minder ungleichmäßigen Verteilung des Glimmers in vertikaler Richtung bei größeren Gneismassen feststellen. Die Oberflächenspannung wird schließlich noch bewirken, daß die Glimmerblättchen mit den breiten Flächen gegeneinander treiben, also

eine Anhäufung in einzelnen, parallelen Lagen stattfindet. Immerhin ordnen sich aber die Blättchen, so daß der Glimmer in jedem Falle eine einheitliche Lagerungsweise zeigen wird. Bei geneigtem Strombett ändert sich lediglich der gemeinsame Winkel zur Horizontalen.

Die eingangs behaupteten, weiteren, rein mechanischen Ursachen für das Annehmen der Paralleltextur sind damit wohl hinreichend begründet. Der Nachweis stützt sich auf die Annahme, daß die hydrodynamischen Gesetze, die ja in bezug auf die natürlichen Verhältnisse nur beschränkte Gültigkeit besitzen, auf den vorliegenden Fall trotzdem mit einiger Annäherung sich anwenden lassen.

Zur Lösung vorliegender Fragen gab mir mein hochverehrter Lehrer, Herr Prof. Dr. J. Koenigsberger, Veranlassung. Hierfür, sowie für das stets rege und fördernde Interesse an dem Verfolg meiner Darlegungen spreche ich ihm an dieser Stelle den herzlichsten Dank aus.